УДК 621.313.39 : 681.5.015 : 004.421.6

АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПОЛУЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МНОГОФАЗНОГО СИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ С ПОСТОЯННЫМИ МАГНИТАМИ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ MATHCAD

Канайкина Ю. Г.
Научный руководитель — профессор Бронов С. А.
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

Синхронные двигатели с постоянными магнитами (СДПМ) находят широкое применение в различных отраслях народного хозяйства, в том числе при создании электроприводов (ЭП) для систем поворота антенн и солнечных батарей космических аппаратов. Одной из основных операций при проектировании является моделирование с использованием типовых программ, например, Matlab и др. Как правило, при этом используются те модели элементов, которые включены в соответствующие библиотеки этих программ. Применительно к СДПМ — это двух и трёхфазные варианты двигателей. В то же время, по разным причинам бывает целесообразно использовать двигатели с иным числом фаз, например, четырьмя, шестью и др. В частности, увеличение числа фаз повышает равномерность вращения, уменьшает токовую нагрузку на силовые ключи каждой фазы, повышает надёжность в случае обрыва одной из фаз. Известные модели СДПМ, как правило, созданы при допущении о геометрической и электрической симметрии (равенстве параметров фазных обмоток), что не всегда бывает справедливо в случае построения прецизионных ЭП. Учёт несимметрии даже для небольшого числа фаз приводит к громоздким выражениям, а в случае многофазных двигателей — весьма затруднён.

В то же время, наличие математических программ общего назначения (MathCAD, Matlab, Maple, Mathematica и т. п.) позволяет автоматизировать процесс получения аналитических моделей при использовании символьных процессоров.

В научно-учебной лаборатории систем автоматизированного проектирования Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета создаётся автоматизированное рабочее место электромеханика, одним из компонентов программного обеспечения которого являются программы, автоматизирующие получение математических моделей электродвигателей различной конструкции, в том числе, многофазных СДПМ. В основу положена известная методика получения таких моделей в рамках теории цепей (так называемая "математическая теория электрических машин"), алгоритмизированная с учётом особенностей программирования символьных преобразований. В качестве базовой выбрана программа MathCAD, позволяющая вводить исходные данные и выводить результаты в привычной для инженеров математической форме.

Все выкладки целесообразно проводить с привлечением матричной алгебры, так как именно в этом случае все операции легко алгоритмизируются для любого числа фаз.

В общем виде математическая модель СДПМ содержит матричное уравнение электрического равновесия:

$$\frac{d\ \phi(t)}{dt} = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{i}(t) + \mathbf{u}(t),$$

где ϕ — вектор-столбец потокосцеплений; $\mathbf{R}$ — диагональная матрица активных сопротивлений обмоток; $\mathbf{i}$ — вектор-столбец токов; $\mathbf{u}$ — вектор-столбец питающих напряжений; t — время.

В развёрнутом виде указанные выше векторы и матрица имеют вид:

$$\mathbf{u}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \ldots \\ u_m(t) \end{bmatrix},\ \mathbf{i}(t)=\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \ldots \\ i_m(t) \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\psi}(t)=\begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \ldots \\ \psi_m(t) \end{bmatrix},\ \mathbf{R}=\begin{bmatrix} R_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & R_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & R_m \end{bmatrix},$$

где m — число фаз обмотки статора.

Связь между током и потокосцеплением определяется матричным уравнением потокосцеплений:

$$\boldsymbol{\psi}(\theta_r,t)=\mathbf{L}[\theta_r(t)]\cdot\mathbf{i}(t)+\boldsymbol{\psi}_\mu[\theta_r(t)],$$

где $\mathbf{L}$ — матрица индуктивностей (собственных и взаимных); $\boldsymbol{\psi}_\mu$ — вектор потокосцеплений постоянных магнитов с соответствующими обмотками:

$$\boldsymbol{\psi}_\mu[\theta_r(t)]=\begin{bmatrix} \psi_{\mu 1}[\theta_r(t)] \\ \psi_{\mu 2}[\theta_r(t)] \\ \ldots \\ \psi_{\mu n}[\theta_r(t)] \end{bmatrix}.$$

Индуктивности:

$$\mathbf{L}[\theta_r(t)]=\begin{bmatrix} l_{1,1}[\theta_{1,1}(t)] & l_{1,2}[\theta_{1,2}(t)] & \ldots & l_{1,m}[\theta_{1,n}(t)] \\ l_{2,1}[\theta_{2,1}(t)] & l_{2,2}[\theta_{2,2}(t)] & \ldots & l_{2,m}[\theta_{2,n}(t)] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{m,1}[\theta_{m,1}(t)] & l_{m,2}[\theta_{m,2}(t)] & \ldots & l_{m,m}[\theta_{m,m}(t)] \end{bmatrix},$$

где $l_{j,k}$ — функции индуктивностей в зависимости от угла поворота; $\theta_{j,k}$ — соответствующие углы между обмотками (некоторые из них являются постоянными значениями, а некоторые могут содержать угол поворота ротора θ_r и являются переменными). Одинаковые индексы соответствуют собственным индуктивностям, а разные — взаимным индуктивностям.

Основное допущение — отсутствие эффекта насыщения магнитной цепи, что означает независимость индуктивностей от токов в обмотках.

Электромагнитная энергия контуров:

$$W_{em}(\theta_r)=\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\psi}^T(\theta_r)\cdot\mathbf{i}(t).$$

Электромагнитный момент определяется как частная производная электромагнитной энергии по углу поворота ротора:

$$M_{em}=\frac{\partial W_{em}(\theta_r)}{\partial\theta_r}=\frac{1}{2}\cdot\mathbf{i}^T(t)\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{L}(\theta_r)}{\partial\theta_r}\right]^T\cdot\mathbf{i}(t)+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\partial\,\boldsymbol{\psi}_\mu(\theta_r)}{\partial\theta_r}\right]^T\cdot\mathbf{i}(t),$$

где учитывается, что постоянный коэффициент (в данном случае ток, не зависящий от угла поворота, по которому производится дифференцирование) может быть вынесен за знак дифференцирования.

Таким образом, получена математическая модель многофазного СДПМ с раздельным подключением обмоток к источнику питания в общем виде. В реальности, при числе фаз больше 2, как правило, используется схема подключения обмоток "звезда без общего провода", что связано с удобством сопряжения двигателя с многофазным мостовым инвертором.

Для получения математической модели со схемой соединения обмоток "звезда без общего провода" можно использовать матричные преобразования исходной модели. Для этого следует представить себе ход преобразований. Один из токов, например, первой фазы, выражается через токи других фаз, в соответствии с чем новый вектор токов получается из исходного:

$$\mathbf{i}(t) = \Pi_{iY}\mathbf{i}_Y(t) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -1 & -1 & \dots & -1 \\ \hline 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline \end{array}\;\begin{array}{|c|}\hline i_2(t) \\ \hline i_3(t) \\ \hline \dots \\ \hline i_m(t) \\ \hline \end{array},$$

где $\mathbf{i}_Y$ — новый вектор токов в схеме "звезда без общего провода" размерности ($m-1$); Π_{iY} — матрица преобразования токов, имеет ($m-1$) столбцов и m строк.

Преобразование уравнения электрического равновесия осуществляется с помощью матрицы, обеспечивающей вычитание из первого уравнения (первой строки) остальных:

$$\Pi_{SY} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & -1 & \dots & 0 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 1 & 0 & \dots & -1 \\ \hline \end{array},$$

где матрицы преобразования уравнений имеет m столбцов и ($m-1$) строк.

Уравнение электрического равновесия умножается слева на матрицу преобразования уравнений, в которое подставляется выражение для вектора тока:

$$\Pi_{SY}\frac{d\,\psi(t)}{dt} = \Pi_{SY}\left[-\mathbf{R}\cdot\Pi_{iY}\cdot\mathbf{i}_Y(t)+\mathbf{u}(t)\right],$$

в результате чего получается уравнение электрического равновесия для схемы "звезда без общего провода":

$$\frac{d\,\psi_Y(t)}{dt} = \Pi_{SY}\cdot(-\mathbf{R}\cdot\Pi_{iY})\cdot\mathbf{i}_Y(t)+\Pi_{SY}\cdot\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}_Y\cdot\mathbf{i}_Y(t)+\mathbf{u}_Y(t),$$

где знаком Y помечены новые переменные схемы "звезда без общего провода".

Уравнение потокосцеплений также преобразуется к новой схеме соединения обмоток умножение слева на матрицу преобразования уравнений:

$$\Pi_{SY}\cdot\psi(\theta_r,t) = \Pi_{SY}\cdot\left\{\mathbf{L}[\theta_r(t)]\cdot\Pi_{iY}\cdot\mathbf{i}_Y(t)+\psi_\mu[\theta_r(t)]\right\}$$

и принимает вид:

$$\psi_Y(\theta_r,t) = \left\{\Pi_{SY}\cdot\mathbf{L}[\theta_r(t)]\cdot\Pi_{iY}\right\}\cdot\mathbf{i}_Y(t)+\Pi_{SY}\cdot\psi_\mu[\theta_r(t)] = \mathbf{L}_Y[\theta_r(t)]\cdot\mathbf{i}_Y(t)+\psi_{\mu Y}[\theta_r(t)].$$

Выражение электромагнитного момента получается путём подстановки в него выражения исходного вектора тока через новый вектор:

$$M_{em}=\frac{1}{2}\cdot\left[\Pi_{l\mathrm{Y}}\cdot\mathbf{i}_{\mathrm{Y}}(t)\right]^{T}\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{L}(\theta_r)}{\partial\theta_r}\right]^{T}\cdot\left[\Pi_{l\mathrm{Y}}\cdot\mathbf{i}_{\mathrm{Y}}(t)\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\partial\,\phi_{\mu}(\theta_r)}{\partial\theta_r}\right]^{T}\cdot\left[\Pi_{l\mathrm{Y}}\cdot\mathbf{i}_{\mathrm{Y}}(t)\right].$$

В результате получены в общем матричном виде основные выражения математической модели СДПМ с произвольным числом фаз. Для моделирования необходимо раскрыть матричные выражения и преобразовать их в систему скалярных дифференциальных уравнений.

В начале вычислений задают: число фаз m, учёт или нет допущения о геометрической симметрии (равномерном расположении обмоток), допущения об электрической симметрии (равенство активных сопротивлений и индуктивностей обмоток, потокосцеплений постоянных магнитов).

Углы расположения фазных обмоток (при условии геометрической симметрии):

$$\alpha_j=\begin{cases}\dfrac{\pi}{p_{\mu}m}(j-1),\ \text{åñëè}\ m-\text{÷¸òíîå}\ ;\\[2ex]\dfrac{2\pi}{p_{\mu}m}(j-1),\ \text{åñëè}\ m-\text{íå÷¸òíîå};\end{cases}\qquad j=1,...,m,$$

где m — число фаз; p_{μ} — число пар полюсов.

Индуктивности:

$$l_{k,j}(\theta_r)=L_{k,j}+L_{\max k,j}\cos[2p_{\mu}\cdot(\theta_{k,j}-\theta_r)],$$

где k, j — индексы фаз, между которыми рассматривается электромагнитное взаимодействие; одинаковые индексы — для собственных индуктивностей обмоток.

Потокосцепления постоянных магнитов ротора с обмотками статора:

$$\psi_k(\theta_r)=\Psi_{\max k}\cos[p_{\mu}\cdot(\alpha_k-\theta_r)],$$

где k — индекс фазы, с которой осуществляется потокосцепление; $\Psi_{\max k}$ — максимальное значение потокосцепления, обусловленное свойствами постоянных магнитов и числом витков соответствующей фазной обмотки.

Углы между фазными обмотками:

$$\theta_{j,k}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\alpha_k-\alpha_j)+\alpha_j,\ \text{åñëè}\ j\neq k;\\[1ex]\alpha_j,\ \text{åñëè}\ j=k.\end{cases}\qquad j,k=1,...,m,$$

Приведённые математические выражения запрограммированы в среде MathCAD с использованием символьного процессора. При задании любого числа фаз осуществляется вывод всей совокупности математических выражений для моделей СДПМ для двух указанных выше вариантов симметрии, для случаев раздельного подключения обмоток к источнику питания (например, для двухфазного СДПМ) или для схемы соединения обмоток "звезда без общего провода". Символьные выкладки осуществляются как с применением встроенных процедур программы MathCAD, так и с использованием специально разработанной собственной библиотеки символьных процедур. Реально обеспечивается получение математических моделей для числа фаз 9 при несимметрии обмоток и более 9 — при симметрии (выражения более просты для восприятия). Полученная модель автоматически передаётся в программу численного интегрирования, в которой осуществляется расчёт переходных процессов.