УДК 62.533

СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ПОЛНОГО ПОРЯДКА

Веретнов А.Г.
Научный руководитель – канд. техн. наук, доцент Кибардин В.В.
Сибирский федеральный университет

Анализ и синтез систем управления во временной области требует знания математической модели объекта управления, которая может быть представлена в терминах вход - переменная состояния - выход. Под переменными состояния x(t) обычно понимают совокупность физических переменных, значения которых, наряду с входными u(t) и выходными y(t) переменными определяют ее будущее состояние.

На рис.1 изображена система, где $y_1(t), y_2(t), \dots y_n(t)$ - выходные переменные, а $u_1(t), u_2(t), \dots u_n(t)$ – входные переменные. Для этой системы переменные состояния $(x_1, x_2, \dots x_n)$ имеют следующий смысл, если в момент времени t_0 известны начальные значения $[x_1(t_0), x_2(t_0), \dots x_n(t_0)]$ и входные сигналы $u_1(t), u_2(t), \dots u_n(t)$ для $t \geq t_0$, то этой информации достаточно, чтобы определить будущие значения всех переменных состояния и выходных переменных.

На практике не все переменные состояния могут быть измерены, так как нет соответствующих датчиков или их просто нельзя установить на объекте управления (например, датчик Холла для измерения характеристик магнитного поля электрической машины). В таких случаях те переменные, которые не могут быть измерены непосредственно, подлежат оценке на основании измеряемых переменных. Это можно выполнить с помощью специальных устройств, которые называются наблюдателями состояния (рис 2).

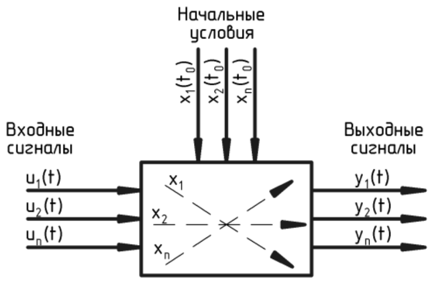

Рис. 1.

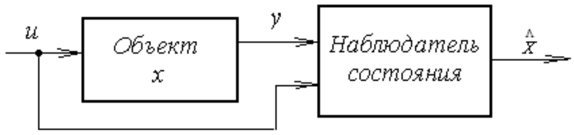

Рис. 2.

Рассмотрим задачу синтеза наблюдателя состояний полного порядка с помощью пакета прикладных программ MATLAB+Simulink для электромеханического объекта, структурная схема которого представлена на рис. 3а, а переходная характеристика – на рис. 3б.

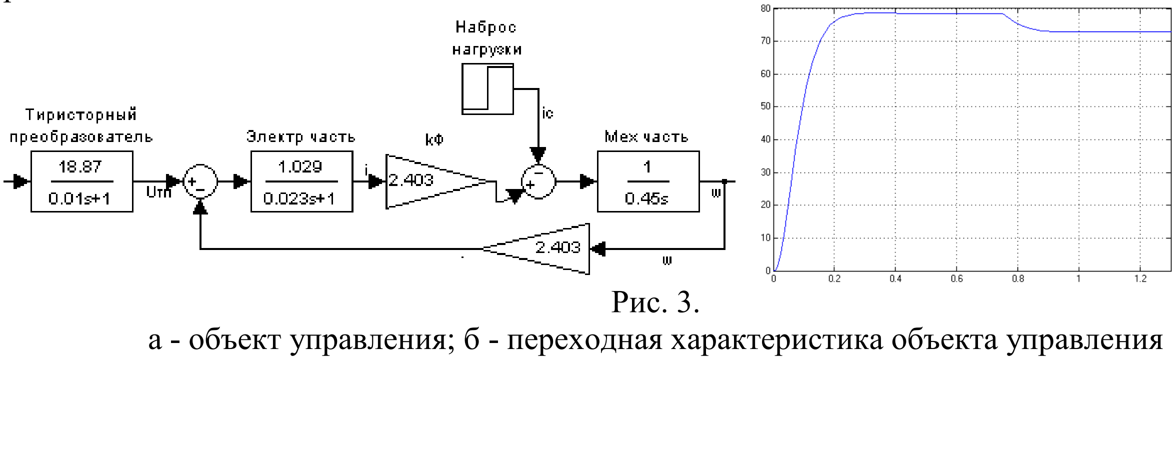

Рис. 3.

а - объект управления; б - переходная характеристика объекта управления

Предположим, что задана непрерывная система с одним входом и одним выходом, описываемая уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax + Bu, y = Cx.$$

Необходимо получить оценку вектора состояния системы x, которую обозначим $\hat{x}$. В процессе оценки известны входной сигнал ***u*** и матрицы системы *A, B* и *C,* тогда

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu, \hat{y} = C\hat{x}.$$

Вектор состояния x в любой момент времени неизвестен, в частности, мы не знаем начальных условий *x(0).* Если начальные условия для систем различны, то $\hat{x}$ сходится к x только тогда, когда исходная система асимптотически устойчива.

Для оценки переменных состояния можно использовать и вектор выходных переменных y. Будем считать, что наблюдатель имеет ту же динамику, что и сама система. Тогда уравнение наблюдателя можно записать в виде $\hat{x}$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = F\hat{x} + Hu + Gy.$$

Матрицы *F, H, G* должны быть выбраны таким образом, чтобы $\hat{x}$ давал точную оценку x. Тогда в системе управления вектор $\hat{x}$ используется для формирования сигнала обратной связи $u = -K\hat{x}$. При этом матричная передаточная функция от входа u к переменной состояния наблюдателя $\hat{x}$

$$\hat{X}(s)/U(s) = (sI - F)^{-1}[H + GC(sI - A)^{-1}B]$$

должна быть равна матричной передаточной функции от u к переменной состояния x

$$X(s)/U(s) = (sI - A)^{-1}B$$

для всех t при нулевых начальных условиях. В этом случае матрицы наблюдателя состояния

$$F = A - GC;$$
$$H = B,$$

уравнение наблюдателя

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = (A - GC)\hat{x} + Bu + Gy,$$

характеристическое уравнение наблюдателя

$$[sI - A + GC] = 0,$$

где неизвестна матрица G.

Если матрицы F и H определены таким образом, то матричные передаточные функции будут равны независимо от матрицы G. Поэтому матрицу G выбирают, исходя из приемлемого вида переходной функции или необходимых частотных характеристик наблюдателя состояния.

При работе с реальными системами необходимо учитывать, что на её действуют помехи, а модель системы не является точной. Следовательно, в процессе оценки возникает ошибка, которая с течением времени не сводится к нулю. Управление системой осуществляется на основе вычисленных переменных (а не измеренных) и в качестве сигнала обратной связи используется оценка переменной состояния. Поэтому действие наблюдателя нуждается в проверке.

Один из методов синтеза наблюдателя состоит в том, чтобы сделать его в 2 - 4 раза более быстродействующим, чем замкнутая система. Следовательно, можно выбрать такое характеристическое уравнение наблюдателя, которое содержит информацию о желаемом быстродействии:

$$D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0.$$

Тогда матрица должна удовлетворять уравнению:

$$|sI - A + GC| = \alpha_в(s)$$

Данная задача схожа с синтезом системы путем размещения полюсов, поэтому для синтеза наблюдателей состояния может быть использована формула Аккермана, в итоге получим следующий результат:

$$G = \alpha_в(A)\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Это выражение позволяет вычислить матрицу G по заданному характеристическому полиному наблюдателя $\alpha_в(s)$ и известным матрицам A и C.

Процедура синтеза наблюдателя может быть выполнена с помощью таких программ как, MATLAB, MathCAD.

Пусть уравнения состояния объекта управления имеют вид:

$$x = \begin{pmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 43{,}478 & -42{,}217 & -104{,}478 \\ 0 & 5{,}34 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1887 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{u},$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$$

Запишем желаемый характеристический полином:

$$\alpha_в(s) = s^3 + 289{,}505s^2 + 37260s + 17980000$$

Найдем матрицу коэффициентов наблюдателя:

$$G = \alpha_в(\mathrm{A}) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{CA} \\ CA^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32640 \\ 501300 \\ 34200 \end{pmatrix}$$

Найдем коэффициенты:

$$l_3 = T_m \cdot 34200 = 0{,}023 \cdot 34200 = 786518$$

$$l_2 = T_a \cdot 501300 = 0{,}023 \cdot 501300 = 11529{,}449$$

$$l_1 = T_{mu} \cdot (-32640) = 0{,}023 \cdot (-32640) = -326{,}397.$$

На рис. 4 представлены структурные схемы набора двух систем: системы с оптимальными жесткими обратными связями по переменным состояния и системы с наблюдателем, а на рис. 5 – переходные функции.

Синтез объекта путем размещения полюсов, похож на метод корневого годографа, позволяющий разместить два доминирующих полюса в заданных точках. Однако современная теория позволяет реализовать заданное положение всех полюсов передаточной функции замкнутой системы. При этом возникает необходимость измерения всех или почти всех переменных состояния.

Синтез данного объекта управления путем размещения полюсов производится в следующем порядке.

Найдем матрицу управляемости,

$$P_c = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1887 & -1887 & 18870000 \\ 0 & 82040 & -11670000 \\ 0 & 0 & 438100 \end{pmatrix}$$

При требуемом быстродействии и качестве переходного процесса, частота собственных колебаний составляет 68,247 с$^{-1}$, исходя из этого, запишем желаемый характеристический полином,

$$\alpha_в(s) = s^3 + 144{,}753s^2 + 9314s + 224700$$

Для систем с одним входом и одним выходом матрицу коэффициентов обратной связи по состоянию $K = [\,k_1\ k_2\ \dots\ k_n\,]$, можно определить с помощью формулы Аккермана:

$$K = (0 \quad 0 \quad 1) \cdot P_c^{-1} \cdot \alpha_в(A) = (0{,}001344 \quad 0{,}054 \quad 0{,}382)$$

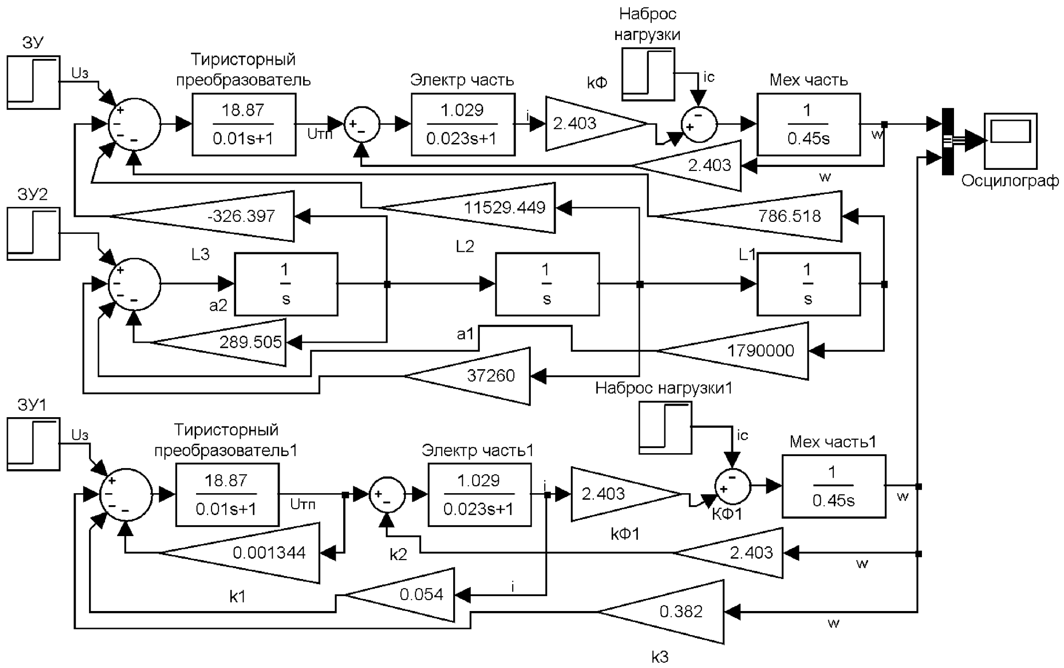

Рис. 4. Модель ОУ с наблюдателем состояния и модель ОУ с оптимальными обратными связями

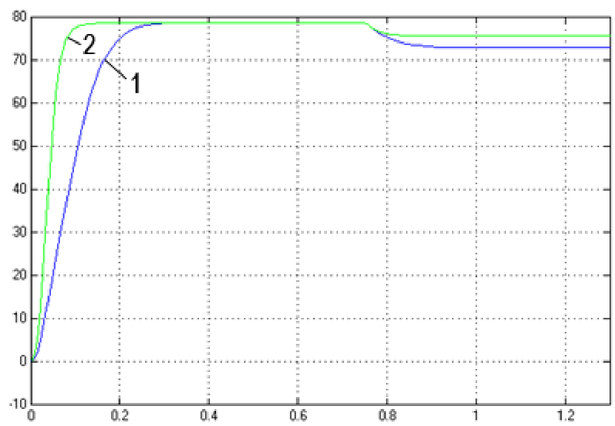

Рис. 5. Переходные характеристики ОУ
1 – объект управления с наблюдателем состояния; 2 – объект управления замкнутый по собственным переменным состояния

Таким образом, введение наблюдателя состояния в контур управления, отрицательно влияет на быстродействие системы, однако его применение оправдано в тех случаях, когда отсутствует возможность измерения координат управления.