УДК 517.65

РЕШЕНИЕ В ЯВНОМ ВИДЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О СКЛЕЙКЕ ВИХРЕВЫХ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Тюпина С.П.
Научный руководитель – к.ф-м.н, профессор Вайнштейн И.И.
Сибирский федеральный университет

Схема отрывных течений жидкости (склейка вихревых и потенциальных течений) в плоской ограниченной области М.А. Лаврентьева приводит к следующей нелинейной задаче:

В ограниченной области D с границей Г требуется найти непрерывно дифференцируемое решение уравнения

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \begin{cases} \omega, \ \text{åñëè}\ \psi < 0, \\ 0, \ \text{åñëè}\ \psi > 0, \end{cases} \qquad (1)$$

при краевом условии

$$\psi\big|_{\tilde{A}} = \varphi(s) \geq 0, \ \ \omega = const > 0. \qquad (2)$$

Гармоническая функция $\psi_0(x, y)$, удовлетворяющая условию (2), в силу принципа максимума положительна в области D и является решением задачи (1), (2). Это решение назовем тривиальным. Оно соответствует потенциальному течению во всей области D.

В работе М.А. Гольдштика доказано существование нетривиального (с областью отрицательности) решения задачи (1), (2) при достаточно большом значении величины ω. И.И. Вайнштейном получено неравенство

$$\omega > \frac{4K\mathring{a}}{R^2}, \qquad (3)$$

при котором существует нетривиальное решение задачи, R – радиус наибольшего по площади круга, который можно вписать в область D, К=max $\varphi(s)$.

В задаче (1), (2) предполагается, что завихренность ω постоянна. В общем случае вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости завихренность является произвольной функцией от функции тока $\psi(x, y)$.

$$\omega = F(\psi), \ \Delta\psi = F(\psi).$$

Одной из нерешенных задач в задаче о склейке вихревых и потенциальных течений идеальной жидкости является задача о количестве решений.

В модельной задаче при постоянной завихренности, если область D – круг радиуса R и $\varphi(s) = K$, при выполнении неравенства (3) задача (1), (2) имеет два нетривиальных решения. Если

$$\omega = \frac{4K\mathring{a}}{R^2} \qquad (4)$$

одно нетривиальное решение.
При

$$\omega < \frac{4K\mathring{a}}{R^2} \qquad (5)$$

нетривиальных решений нет.

Предположение о постоянстве завихрённости – частный случай вихревого течения идеальной жидкости.

Рассмотрим $\omega = F(\psi) = -A\psi,\ \ A > 0,$
и область D – круг радиуса R, $\varphi(s)$ =K>0.

В этом случае приходим к задаче:

$$\Delta\psi = \begin{cases} -A\psi, & \text{åñëè}\,\psi < 0, \\ 0, & \text{åñëè}\ \psi > 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\psi\big|_{r=R} = K > 0 \tag{7}$$

Функция $\psi(x, y) = K > 0$ является тривиальным решением задачи (6), (7).

Ищем решение задачи, зависящее только от *r*: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\psi_{rr}(r) + \frac{1}{r}\psi_r(r) = \begin{cases} -A\psi, & \text{åñëè}\ \psi < 0, \\ 0, & \text{åñëè}\ \psi > 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\psi\big|_{r=R} = K,\ \ \psi(0) - \text{ограниченно.} \tag{9}$$

<u>Теорема</u>. Пусть r^* – первый ноль функции Бесселя $J_0(r)$.

$$r^* \approx 2{,}4048.$$

Задача (8), (9) в случае $\dfrac{r^*}{\sqrt{A}} \ge R$ нетривиальных решений не имеет,

в случае $\dfrac{r^*}{\sqrt{A}} < R$ имеет только одно нетривиальное решение.

$$\psi(r) = \begin{cases} \dfrac{K}{a\ln\dfrac{a}{R}\sqrt{A}J_1(\sqrt{A}\text{à})} J_0(\sqrt{A}r), & \text{åñëè}\ \ 0 \le r \le a, \\[2ex] \dfrac{K\ln\dfrac{r}{a}}{\ln\dfrac{R}{a}}, & \text{åñëè}\ \ \text{à} \le r \le R.\ \ \text{à} = \dfrac{r^*}{\sqrt{A}}. \end{cases} \tag{10}$$

И.И. Вайнштейном, П.С. Литвиновым, Е.Е. Савиных в модельном примере с завихрённостью $\omega = \text{å}^{\lambda\psi}$ установлена возможность существования в случае $\lambda > 0$ двух нетривиальных решений; в случае $\lambda < 0$ даже трех нетривиальных решений.

В рассматриваемом примере установлен эффект возможности уменьшения количества нетривиальных решений, если отказаться от условия постоянства завихрённости.