УДК 004.312.44

ПОИСК ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ РАЗНОТИПНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ-НЕРАВЕНСТВ

Новиков А.А.
Научный руководитель - к.т.н., доцент Кузнецов А.В.
Сибирский федеральный университет

Решение задач глобальной оптимизации является актуальной проблемой. Многие инженерные задачи достаточно хорошо описываются лишь нелинейными моделями, и часть переменных могут быть дискретными. Причинами тому могут быть: неделимость, фиксированность стоимости, фиксированность размеров, наличие выбора из имеющихся вариантов. Подобные задачи встречаются в самых различных областях человеческой деятельности (химии, геологии, экономики, САПР, логистике и т.д.).

Данный подход в иностранной литературе получил название Mixed Integer Nonlinear Programming (MINLP). Задачи MINLP и методы их решения активно изучаются последние 30-40 лет; на настоящий момент это все еще актуальная область, перспективная с точки зрения получения новых результатов. В форме MINLP, как правило, ставятся задачи, в которых требуется одновременно оптимизировать структуру системы (дискретная часть) и ее параметры (непрерывная часть).

Алгоритм, предложенный в данной статье, позволяет избежать некоторых недостатков известных методов глобальной оптимизации и уменьшить время, требуемое для поиска решения.

Постановка задачи

Необходимо отыскать условный глобальный минимум функции многих переменных $I(x,y)$ с учетом ограничений-неравенств $\varphi_j(x) \le 0$, $j = \overline{1, m_1}$, где $x = (x_1, \cdots, x_k)$ – непрерывные переменные, $y = (y_1, \cdots, y_l)$ – дискретные номинальные (неупорядоченные) переменные.

Предложен следующий эвристический алгоритм поиска, построенный на базе программного комплекса «Global Optimizer v2.0».

Данный алгоритм, по сути, является усовершенствованием метода усреднения координат со встроенными в него процедурами адаптации области поиска. Основным отличием данного подхода является отсутствие дискретизации непрерывных переменных.

Исследователь определяет количество дискретных переменных в решаемой задаче. Далее для каждого фиксированного значения дискретной переменной формируется функция качества, которая зависит только от непрерывных переменных. В результате исходная задача разбивается на m_2 подзадачи, где $m_2 = \sum_{i=1}^{l} \mu_{\text{i}}$ и μ_{i} – количество значений каждой дискретной переменной.

После разбиения на подзадачи производится поиск глобального минимума для каждой подзадачи, алгоритм с пассивным учетом ограничений, с последующим выбором наилучшего решения среди всех подзадач.

Алгоритм поиска с пассивным учетом ограничений.

Решаем задачу недифференцируемой глобальной минимизации ограниченной функции в пространстве непрерывных переменных.

$$I(x) = \min_{x \in X}$$

по m-мерному вектору $x = (x_1, \ldots, x_m)^T$, изменяющемуся в области X:

$$x \in X \subset R^m.$$

Алгоритм движения к минимуму на (l+1)-м шаге, если на предыдущем шаге был получен вектор искомых переменных x^l, построенный на основе метода усреднения координат, имеет вид:

$$x_\nu^{l+1} = x_\nu^l + \Delta x_\nu^l u_{\nu,\min}, \; u_{\nu,\min} = \sum_{i=1}^{n} u_\nu^{(i)} \bar{p}_{s,\min}^{(i)}, \; \nu = \overline{1, m},$$

$$\bar{p}_{s,\min}^{(i)} = \frac{p_s(g_{\min}^{(i)})}{\sum_{j=1}^{n} p_s(g_{\min}^{(j)})}, \; g_{\min}^{(i)} = \frac{I^{(i)} - \widehat{I}_{\min}}{\widehat{I}_{\max} - \widehat{I}_{\min}}, \tag{1}$$

$$\Delta x_\nu^{l+1} = \gamma_q \cdot \Delta x_\nu^l \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} | u_\nu^{(i)} |^q \bar{p}_{s,\min}^{(i)} \right)^{1/q}, \; \nu = \overline{1, m},$$

$$l = 0, 1, 2, \cdots; [[0 < \gamma_q, q \in \{1, 2, \cdots\}, 0 < s].$$

Здесь: $\widehat{I}_{\max} = \max\{I^{(i)}, i = \overline{1, n}\}$, $\widehat{I}_{\min} = \min\{I^{(i)}, i = \overline{1, n}\}$; s – коэффициент селективности ядра $p_s(\cdot)$; в переменных $u_\nu^{(i)}$, $\bar{p}_{s,\min}^{(i)}$ для упрощения записи опущен номер итерации l; всегда $0 \le g_{\min}^{(i)} \le 1$. Весовые коэффициенты (ядра) $\bar{p}_{s,\min}^{(i)}$ нормированы по системе n пробных точек: $\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{s,\min}^{(i)} = 1$.

Перед совершением $(l+1)$-го рабочего шага при получении пробных точек $x^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$ последовательно генерируется n точек (равномерно распределённые) в области, заданной ограничениями. Для этого в исходной прямоугольной области пробных движений последовательно генерируются точки, и из них оставляется n точек, которые удовлетворяют ограничениям-неравенствам. За счет этого рабочие шаги всегда совершаются внутри допустимой области. Таким образом, происходит переход от задачи условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации.

$$x_\nu^{(i)} = x_\nu^l + \Delta x_\nu^l \cdot u_\nu^{(i)}, u_\nu \in [-1; 1], \nu = \overline{1, m}, \; i = 1, 2, \cdots.$$

Пробные точки лежат в области $X^l = \Pi^l \bigcap X$. В пробных точках вычисляется минимизируемая функция $I^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, и на основе этих экспериментальных данных [$x_\nu^{(i)}$, $\nu = \overline{1, m}$, $I^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$] совершается вышеприведённое рабочее движение.

Исходная рабочая точка x^0 и размеры Δx^0 прямоугольной области Π^0 выбираются так, чтобы Π^0 охватывала допустимую область X или ту её часть, где расположен искомый глобальный экстремум.

$p_s(g)$ на интервале изменения $0 \le g \le 1$ являются неотрицательными убывающими ядрами. Выбор формы и степени s селективности ядра существенно влияет на характеристики поиска глобального минимума.

Кроме простейших ядер $p_s(g)$ (экспоненциального: $exp(-sg)$, степенного: s^{-g}, гиперболического: g^{-s}) могут использоваться, например, линейное, параболическое, кубическое и т. д. в степени s: $p_s(g) = (1 - g^r)^s$, $r = 1, 2, 3, \cdots$, а также аналогичные формы экспоненциального ядра с g^r: $p_s(g) = exp(-sg^r)$, $r = 1, 2, 3, \cdots$. Здесь r обычно не превышает 10: $1 \le r \le 10$. Эти виды ядер, а также гиперболическое g^{-s} ядро, конструируются по единому образцу.

За основу берется убывающая в интервале $[0; 1]$ функция $p(g)$, и она возводится в степень s: $p_s(g) = \left(p(g)\right)^s$. Для таких $p(g)$ всегда $1 < (p(y)/p(z))$ при $y < z$. Ядра $p_s(g)$ удовлетворяют основному условию ранее доказанной теоремы об усреднении координат при поиске глобального минимума (максимума): $\lim\limits_{s\to\infty} \left(p(y)\right)^s / \left(p(z)\right)^s = \lim\limits_{s\to\infty} \left(p(y)/p(z)\right)^s = \infty$; $0 \le y < z \le 1$.

Алгоритмы реализованы программно и включёны в пакет глобальной оптимизации Global Optimizer v2.0, в котором представлены основные алгоритмы глобальной оптимизации, базирующиеся на методе усреднения координат. Пакет реализован на языке Delphi с использованием среды визуального программирования Embarcadero Delphi 2010.

Представленный эвристический алгоритм решения задачи глобальной оптимизации в пространстве разнотипных переменных привлекает своей простотой и высокой точностью поиска глобального экстремума.

Недостатком этого алгоритма является то, что если ограничения задают область, которая значительно отличается по конфигурации от прямоугольной области, или если решение находится на границе допустимой области, то алгоритм сделает большее количество вычислений функций ограничений, так как часть области варьирования будет находиться в недопустимой области. Кроме того, с ростом размерности задачи и количества ограничений алгоритм оказывается не способным разместить n пробных точек за разумное число попыток. Это объясняется тем, что если нарушение происходит хотя бы в одной координате пробной точки, то такая точка считается недопустимой, и процесс ее генерации повторяется. Так как в общем случае процедура размещения пробных точек не имеет информации о том, какие координаты пробной точки оказались недопустимыми, то приходится заново размещать все координаты. Таким образом, с ростом размерности задачи и количества ограничений вероятность успешного размещения пробной точки уменьшается.