УДК 629.78.015

ПОСТАНОВКА ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ И СПОСОБЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕОРИИ УЛЬТРАСИСТЕМ

Байрамов К.Р., к.т.н., доцент
Научный консультант — д.т.н., профессор Бетанов В.В.
Военная академия РВСН имени Петра Великого, г. Москва

Обратные задачи изучения движения — это задачи, связанные с обращением причинно-следственных связей. Они возникают как задачи интерпретации полученных в эксперименте измерений, поэтому иначе их называют измерительными задачами или задачами оценивания.

Анализ условий существования и единственности решения обратных задач и процесс их решения трудоемки, поэтому необходимо стремиться обеспечить регулярность, корректность и оптимальность математической постановки измерительной задачи.

Постановка задачи называется регулярной, если она обеспечивает существование единственного решения с требуемыми предельными свойствами по объему выборки измерений. В нерегулярных задачах существует или множество решений, или одно ошибочное решение, которое не может быть исправлено за счет увеличения объема измерений.

Постановка задачи называется корректной, если ее решение устойчиво по отношению к исходным данным задачи. В некорректных задачах возникает сильная зависимость решения от вариаций математической модели движения, от реализации той или иной выборки измерений, от вычислительных ошибок алгоритма решения.

Постановку задачи называют оптимальной, если среди всех эквивалентных ее постановок ей соответствует наиболее эффективный и простой алгоритм решения. Оптимальная задача должна быть обязательно регулярной и корректной. Регулярная задача может быть как корректной, так и некорректной. Однако нарушение условий регулярности обычно приводит к некорректности.

Исходные данные измерительной задачи всегда содержат выборку измерений, а также информацию об условиях измерений, т. е. вероятностные характеристики ошибок измерений и способ их комбинации с измеряемыми параметрами. Вследствие этого измерительные задачи являются статистическими задачами и их решения являются случайными. Данное обстоятельство еще более увеличивает сложность измерительных задач. Измерительную задачу можно интерпретировать как сложную решающую систему, входом в которую является выборка результатов измерений, а выходом — оценки неизвестных параметров.

При использовании системного подхода сначала выявляются типические свойства системы в целом, а затем система делится на части так, чтобы типические свойства сохранялись. Информация, получаемая в результате исследования отдельных подсистем, суммируется также с учетом структурных свойств.

Математическая постановка задачи оценивания движения КА имеет следующий вид:

Дано:

реальное движение определяется n-мерной вектор-функцией на отрезке времени T

$$R : \mathbf{x}^*(t),\ t \in T; \qquad (1)$$

математическая модель движения:

$$G: \quad \ldots \quad \mathbf{x}_0 \in K; \tag{2}$$

измеряемый выход

$$S: \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}); \tag{3}$$

условия проведения измерений

$$Q: \mathbf{z}_i = \varphi(\mathbf{x}_i^*) + \mathbf{h}_i, \ \ (i = 1, 2, ..., N); \tag{4}$$

плотность распределения вероятностей $p(\mathbf{h})$ вектора ошибок

$$\mathbf{h} = \left[\mathbf{h}_1^T, \mathbf{h}_2^T, ..., \mathbf{h}_N^T\right]^T; \tag{5}$$

критерии качества решения

$$A: \ \alpha(\tilde{\ } \quad \int_K \quad \tilde{\ } \quad dK, \tag{6}$$

где $W(\tilde{\ }$ — функция потерь и $L(\mathbf{z}; \mathbf{x}_0)$ — функция правдоподобия выборки $\mathbf{z} = \left[\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T, ..., \mathbf{z}_N^T\right]^T$;

Требуется:

определить оценку $\hat{\mathbf{x}}_0$ (или $\hat{\mathbf{x}}_0(t)$, t∈T) из условия

$$\alpha(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{z}) = \min_{\mathbf{K}} \alpha(\tilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{z}) \tag{7}$$

Рассмотрим данную задачу как сложную систему со множеством входов $\mathbf{z} \in Z$ и множеством выходов $\hat{\mathbf{x}}_0 \in \mathbf{K}$, состоящую из пяти взаимосвязанных подсистем *R, G, S, Q* и *A*. Структурой данной системы следует считать совокупность свойств отображения $\mathbf{\Psi}: \mathbf{z} \to \tilde{\ }$, являющихся вариантными относительно гомеоморфных или диффеоморфных преобразований вектора **x**. Так как составной частью системы является пара *G*—*S*, то ее структурные свойства (наблюдаемость, декомпозируемость, устойчивость) являются структурными свойствами измерительной задачи. Кроме того, измерительная задача имеет свои специфические свойства.

Адекватность. Чтобы обеспечить близость решения $\hat{\mathbf{x}}_0$ к действительному значению вектора начальных условий $\mathbf{x}_0$*, математическая модель движения *G* должна быть близка к реальному движению *R*. С этой целью между *R* и *G* необходимо ввести отношение адекватности с помощью расстояния между траекториями $\mathbf{x}^*(t)$ их $\mathbf{x}(t)$:

$$\rho(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) = \left(\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [\mathbf{x}^*(\mathrm{t}) \text{-} \mathbf{x}(t)]^T [\mathbf{x}^*(\mathrm{t}) \text{-} \mathbf{x}(t)] dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Математическая модель *G* называется ε-адекватной реальному движению *R* с начальными условиями $\mathbf{x}_0$*, если существует такая точка $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{K}$, в которой

$$\rho(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) \le \varepsilon. \tag{9}$$

Подобное отношение адекватности можно ввести и для пары *Q*—*S*. Однако реальный процесс измерений обычно моделируется более точно, чем движение объекта. Можно считать, что модель *S* всегда близка к условиям *Q*. Это допущение является рациональным еще и потому, что проверить адекватность по результатам измерений можно только для одной пары элементов *R*—*G* или *S*—*Q*.

Состоятельность. Критерий качества решения задачи при заданных условиях измерений должен обеспечить получение оптимальных в некотором смысле оценок. Различные понятия оптимальности возникают в связи с разнообразием функций потерь $W(\tilde{\ }$. Критерий качества $\alpha(\tilde{\ }$ определяет не только смысл оптимальности оценок, но и характер вычислительной процедуры решения задачи.

Критерий качества α(~ называется состоятельным по отношению к условиям измерений Q, если соответствующее ему решение $\hat{\mathbf{x}}_0(N)$ является единственным и обладает свойством сильной сходимости к действительному значению $\mathbf{x}_0$*:

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{N\to\infty} \|\hat{\mathbf{x}}_0(N) - \mathbf{x}_0^*\| \geq \eta\right\} = 0 \tag{10}$$

при условии, что ε=0 (адекватность) для любого η>0.

Понятие регулярности задачи определяется следующими структурными свойствами измерительной задачи: наблюдаемостью, адекватностью и состоятельностью. Установить наличие или отсутствие в системе названных структурных свойств на основе их определений не представляется возможным в связи с их теоретико-множественным характером. Однако это можно сделать косвенным путем, используя различные критерии необходимого и достаточного типа.

Структурную схему измерительной задачи можно представить в следующем виде (рис.1).

В соответствии с принципами классификации систем, предложенными профессором А. В. Чечкиным, здесь можно выделить прежде всего систему G—S (объект) и сверхсистему $R-Q$ (стенд). Далее для каждой пары «система — сверхсистема» существует третья система, называемая ультрасистемой (интеллект), которая может перерабатывать информацию о системе и сверхсистеме и принимать решение о системе в рамках сверхсистемы. Ультрасистемой в данном случае является оператор и ЭВМ, реализующие алгоритм решения задачи в соответствии с заданным критерием качества A. Система связана со сверхсистемой через отношение адекватности, а ультрасистема связана с системой каналом **y**, а со сверхсистемой – информационным каналом **z** и отношением состоятельности. Ультрасистема перерабатывает информацию в информацию с помощью одного из трех ультраоператоров (контроля, анализа, синтеза), в данном случае с помощью ультраоператора анализа.

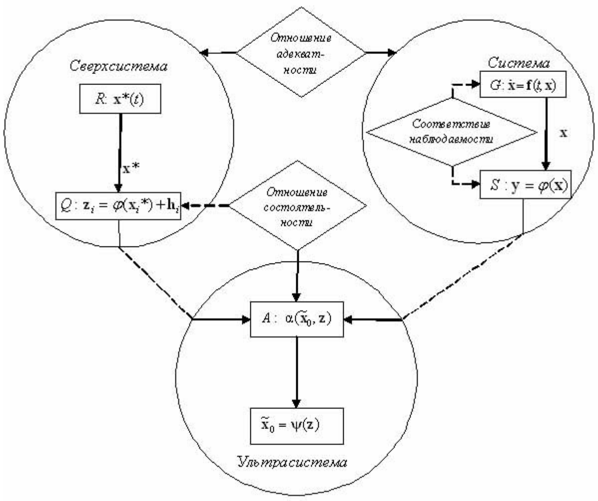

Рис. 1. Структурная схема измерительной задачи

Системный подход к измерительной задаче позволяет как проанализировать правильность ее математической постановки, так и выработать рекомендации по синтезу метода решения задачи. Процесс формулирования измерительной задачи и анализа ее структуры неотделим от методов ее решения. Возможность синтеза метода решения измерительной задачи на основе условий регулярности позволяет получить решение нелинейной измерительной задачи в результате выполнения трех операций, каждая из которых тесно связана с одним из условий регулярности: аппроксимации измеряемых параметров с учетом условия адекватности, обращения нелинейных зависимостей для неизвестных параметров на основе условия наблюдаемости, оценивания параметров с учетом условия состоятельности.

Построение методов решения измерительных задач можно осуществлять в соответствии со структурной схемой на рис. 2.

Анализ структуры измерительной задачи прежде всего позволяет определить регулярность задачи. Для решения нерегулярных задач нельзя использовать метод минимального риска с выпуклой функцией потерь, так как нерегулярная задача может иметь множество решений, а статистический метод обеспечивает получение такого единственного решения, которое вероятнее всего не будет совпадать ни с одним из решений задачи.

После определения регулярности задачу решают или преобразуют ее постановку с целью упрощения алгоритма решения. Регулярная задача может быть подвергнута оптимизации, а нерегулярная задача — регуляризации. Оптимизация математической постановки регулярной измерительной задачи может осуществляться выбором более рациональной модели движения *G*, декомпозицией задачи на более простые подзадачи, предварительной обработкой результатов измерений и т. п. Регуляризация математической постановки нерегулярной измерительной задачи может осуществляться расширением состава измеряемых параметров *S*, декомпозицией задачи на регулярную и нерегулярную подзадачи, привлечением дополнительной априорной информации об оцениваемых параметрах и т. д.

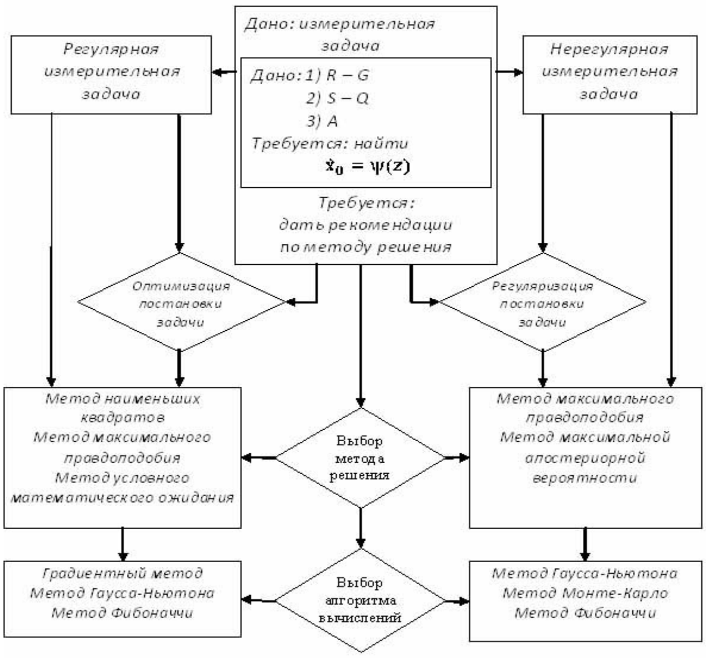

Рис. 2. Структурная схема построения метода решения измерительных задач

Выбор метода обработки измерений определяется выбором функции потерь. После решения данного вопроса производится выбор вычислительной процедуры оценки неизвестных параметров. Уравнения для оценок в общем случае являются нелинейными, и их свойства зависят от модели движения, уравнений измерения и функции потерь. Процесс решения нелинейных уравнений имеет много общего с поиском экстремума функции многих переменных.

Выбор вычислительного алгоритма осуществляется среди алгоритмов поиска экстремума: метод Монте–Карло, метод Фибоначчи, метод Гаусса–Ньютона, градиентный метод и т. д. Вычислительный алгоритм должен быть согласован в свою очередь со статистическим методом обработки измерений.