УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОВЕРХНОСТЯХ НАГРЕВА ПАРОГЕНЕРАТОРА

Кравцов А.П.
Научный руководитель – доцент Анферов П.И.

Сибирский федеральный университет

При очистке поверхностей нагрева парогенератора аппаратами водяной обдувки, вследствие резкого изменения температурных полей, возникают температурные напряжения, которые влияют на работоспособность конструкции. Количественное описание этих процессов является темой данной работы.

Рассмотрим плоскую квазистатическую задачу теории термоупругости для цилиндра $1 \le r \le R$, который первоначально находится при постоянной температуре, а затем на части его внешней верхней поверхности $r = R$ создается тепловое возмущение (внезапный нагрев или охлаждение), действующее в течение конечного времени. Внутренняя и внешняя поверхности цилиндра предполагаются свободными от напряжений.

При дальнейших расчетах динамические эффекты не учитываются. В этом случае напряжения зависят от времени неявно как от параметра через температуру. Теплофизические и механические свойства материала цилиндра полагаются не зависящими от температуры. Запишем основные соотношения термоупругости для решения поставленной задачи.

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = a\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial^2 r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}\right). \tag{1}$$

Начальное и граничные условия для (1)

$$\theta(r,\varphi,0) = 0\ ,\quad \theta(1,\varphi,t) = 0, -\lambda\frac{\partial\theta(R,\varphi,t)}{\partial r} = q(\varphi)\cdot p(t). \tag{2}$$

θ – температура;

a – коэффициент температуропроводности;

λ – коэффициент теплопроводности;

$q(\varphi),\quad p(t)$ заданные функции своих аргументов.

Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \dfrac{1}{r}\sigma_{rr} = \dfrac{1}{r}\left(f - \dfrac{\alpha E\theta}{1-\nu}\right) \\ \dfrac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial\varphi} + \dfrac{2}{r}\sigma_{r\varphi} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(f - \dfrac{\alpha E\theta}{1-\nu}\right) \end{cases}. \tag{3}$$

Граничные условия для (3) и (4) таковы:

$$\sigma_{rr}(R,\varphi) = \sigma_{r\varphi}(R,\varphi) \equiv 0, \quad \sigma_{rr}(1,\varphi) = \sigma_{r\varphi}(1,\varphi) \equiv 0. \tag{4}$$

Условие совместности деформаций в напряжениях

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{5}$$

Величина f равна:

$$f = \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{\alpha E\theta}{1-\nu}. \tag{6}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; α – коэффициент линейного расширения материала полосы.

Функция $f(r,\varphi,t)$ при $r=1$ должна удовлетворять условиям однозначности для угла поворота и перемещений.

Все искомые величины σ_{jk},θ,f в поставленной задаче являются периодическими функциями координаты φ с периодом 2π, поэтому естественно их представить рядами Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$, например:

$$\sigma_{jk}(r,\varphi,t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\sigma_{jk}^{*}(r,n,t)\exp(in\varphi). \tag{7}$$

Символом «*» помечены коэффициенты комплексного ряда Фурье

$$\sigma_{jk}^{*}(r,n,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_{jk}(r,\varphi,t)\exp(-in\varphi)\,d\varphi\,. \tag{8}$$

Применив интегральное преобразование (7), ко всем членам уравнений (1) - (5) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов Фурье напряжений:

$$\frac{d\sigma_{rr}^{*}}{dr}+\frac{2}{r}\sigma_{rr}^{*}+\frac{in}{r}\sigma_{r\varphi}^{*}=\frac{1}{r}(-\beta\theta^{*}+f^{*}), \tag{9}$$

$$\frac{di\sigma_{r\varphi}^{*}}{dr}+\frac{2}{r}i\sigma_{r\varphi}^{*}+\frac{n}{r}\sigma_{rr}^{*}=\frac{n}{r}(-\beta\theta^{*}+f^{*}), \tag{10}$$

с граничными условиями:

$$\sigma_{rr}^{*}(R,n)=\sigma_{r\varphi}^{*}(R,n)=0,\ \sigma_{rr}^{*}(1,n)=\sigma_{r\varphi}^{*}(1,n)=0. \tag{11}$$

Для коэффициентов Фурье температуры из (1)–(2) имеем дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial\theta^{*}}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^{2}\theta^{*}}{\partial r^{2}}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta^{*}}{\partial r}-\frac{n^{2}}{r^{2}}\theta^{*}\right). \tag{12}$$

с начальными и граничными условиями:

$$\theta^{*}(r,n,0)=0,\ \theta^{*}(1,n,t)\equiv 0,\qquad \lambda\frac{\partial\theta^{*}(R,n,t)}{\partial r}=q^{*}(n)\cdot p(t). \tag{13}$$

Для функции $f^{*}(r,n,t)$ из (5) после применения конечного преобразования Фурье (7) получим

$$\frac{d^{2}f^{*}}{dr^{2}}+\frac{1}{r}\frac{df^{*}}{dr}-\frac{n^{2}}{r^{2}}f^{*}=0. \tag{14}$$

Введем новые неизвестные функции σ_1,σ_2 соотношениями:

$$\sigma_1=\sigma_{rr}^{*}+i\sigma_{r\varphi}^{*},\ \sigma_2=\sigma_{rr}^{*}-i\sigma_{r\varphi}^{*}, \tag{15}$$

которые связаны с искомыми величинами равенствами:

$$\sigma_{rr}^{*}=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2),\qquad \sigma_{r\varphi}^{*}=\frac{1}{2i}(\sigma_1-\sigma_2). \tag{16}$$

Складывая (9) и (10), а затем, вычитая (10) из (9) с учетом (15) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d\sigma_1}{dr}+\frac{2+n}{r}\sigma_1=\frac{1+n}{r}[-\beta\theta^{*}+f^{*}], \tag{17}$$

$$\frac{d\sigma_2}{dr}+\frac{2-n}{r}\sigma_2=\frac{1-n}{r}[-\beta\theta^{*}+f^{*}]. \tag{18}$$

Функции σ_1 и σ_2 в соответствии с формулами (11), (15) должны удовлетворять условиям:

$$\sigma_1(1,n,t)=\sigma_2(1,n,t)=0,\ \sigma_1(R,n,t)=\sigma_2(R,n,t)=0\,. \tag{19}$$

Подставив общее решение уравнения (14) в (17), (18) запишем решение для σ_1 и σ_2, удовлетворяющие первым двум условиям (19):

$$\sigma_1=\frac{r^{-n-2}}{2}\left[A_n(r^{2}-1)(n+1)+B_n\left(r^{2n+2}-1\right)-2(n+1)I_1(r,n,t)\right], \tag{20}$$

$$\sigma_2=\frac{r^{n-2}}{2}\left[A_n\left(r^{2-2n}-1\right)+B_n(1-n)(r^{2}-1)-2(1-n)I_2(r,n,t)\right]. \tag{21}$$

Здесь:

$$I_1(r,n,t) = \beta\int_1^r r^{n+1}\theta^*(r,n,t)dr, \qquad I_2(r,n,t) = \beta\int_1^r r^{1-n}\theta^*(r,n,t)dr. \tag{22}$$

Подчинив σ_1, σ_2 двум последним условиям (19) получим систему линейных алгебраических уравнений для определения констант A_n, B_n:

$$A_n(1+n)(R^2-1) + B_n(R^{2n+2}-1) = 2(1+n)I_1(R,n,t), \qquad n \neq -1, \tag{23}$$

$$A_n(R^{2-2n}-1) + B_n(1-n)(R^2-1) = 2(1-n)I_2(R,n,t), \qquad n \neq 1, \tag{24}$$

Из уравнений (23), (24) находим:

$$A_n = 2(1-n)[(1+n)(R^2-1)I_1(R,n,t) - (R^{2n+2}-1)I_2(R,n,t)]D^{-1}, \tag{25}$$

$$B_n = 2(1+n)[(1-n)I_2(R,n,t) - (R^{-2n+2}-1)I_1(R,n,t)]D^{-1}, \tag{26}$$

$$D = -n^2(R^2-1) + R^2(R^n - R^{-n})^2$$

где .

Коэффициенты Фурье для напряжений при $n = 0$ формально совпадают с выражениями для σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ в решении плоской осесимметрической задачи термоупругости для полого цилиндра.

Функции $\sigma_1(r,n,t), \sigma_2(r,n,t)$ в (20), (21) тождественно равны нулю соответственно при $n = -1$ и $n = 1$. В этих случаях одно из уравнений (23), (24) обращается в тождество. Для определения пар неизвестных A_{-1}, B_{-1} и A_1, B_1 недостающие уравнения получены с помощью условий однозначности перемещений.

Для вычисления интегралов (22) нужно знать коэффициенты Фурье температуры $\theta^*(r,n,t)$, которые описываются дифференциальным уравнением (12). Решение этого уравнения целесообразно осуществить методом конечных разностей.

Для этого заменим область непрерывного изменения аргументов r,t расчетной сеткой – дискретным множеством точек. Вместо функции $\theta^*(r,n,t)$ введем в рассмотрение сеточную функцию $\theta^*(r_i,n_i,t_j)$, соответствующую узлам сетки (r_i,t_j). Обозначив $\theta^*(\omega,y_i,t_j) = \theta_i^j$, заменим в уравнении (12) производные конечно-разностными отношениями:

$$\frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{a\tau} = \frac{1}{h^2}\left(\theta_{i-1}^{j+1} - 2\theta_i^{j+1} + \theta_{i+1}^{j+1}\right) - \frac{n^2\theta_i^{j+1}}{r_i^2} + \frac{\theta_{i+1}^{j+1} - \theta_{i-1}^{j+1}}{2r_i^2 h}. \tag{27}$$

где $\quad r_i = i\cdot h + 1, \qquad i = 0,1,2,\ldots,n; t_j = j\cdot\tau, \qquad j = 0,1,2,\ldots,n;$

h,τ – шаги сетки по координате r и времени t.

Граничные условия для (27):

$$\theta_0^{j+1} = 0, \qquad \frac{\lambda}{h}\left(\theta_n^{j+1} - \theta_{n-1}^{j+1}\right) = q^*(n)\cdot p(t_{j+1}). \tag{28}$$

Матрица системы алгебраических уравнений (27) трехдиагональная, симметричная с диагональным преобладанием, ее элементы не зависят от времени. Поэтому для решения системы (28) применен устойчивый в данном случае метод прогонки и получено множество значений $\theta^*(r_i,n,t_j)$ в узлах сетки при различных значениях номера n. Это позволяет численно найти интегралы (27), вычислить затем функции $\sigma_1(r_i,n,t_j)$, $\sigma_2(r_i,n,t_j)$, и по ним преобразования Фурье напряжений $\sigma_{rr}^*(r_i,n,t_j)$, $\sigma_{r\varphi}^*(r_i,n,t_j)$, $\sigma_{\varphi\varphi}^*(r_i,n,t_j)$. Затем, суммируя ряды Фурье, получаем поля температуры и термических напряжений внутри цилиндра.