УДК 621.83

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭМК ПРИ ВЕДУЩЕМ НАРУЖНОМ КОЛЬЦЕ

Шемякин Д. В., Леонтьев А. С., Собко И. В.
Научные руководители – доцент Мерко М. А., ст. преподаватель Меснянкин М. В.
Сибирский федеральный университет

Одним из важных моментов при исследовании эксцентрикового механизма качения (ЭМК) является однозначное определение положений всех его звеньев в пространстве или на плоскости в определенные моменты времени. Сложность задачи о положениях звеньев ЭМК заключается в её нелинейности, что указывает на существование ситуаций, когда получение однозначно приемлемого решения либо весьма затруднено или вовсе не возможно. Однако, анализ структуры эксцентрикового механизма качения показывает, что оси, проходящие через геометрические центры всех его звеньев параллельны друг другу. Данная особенность структуры ЭМК позволяет утверждать, что получение однозначно приемлемого решения данной задачи вполне возможно. При этом решение задачи о положениях звеньев эксцентрикового механизма качения намного упрощается, если однозначно определить функции положений всех звеньев механизма в явном виде, что возможно достичь, создав и решив математическую модель ЭМК.

Используя основные положения, представленные в работах научных руководителей, коллективом студентов под их руководством разработан алгоритм, позволяющий обеспечить формирование математической модели для механизмов данного вида с учетом особенностей строения их структуры исходя из заданных условий. Рассмотрим данный процесс подробнее на примере формирования математической модели ЭМК при ведущем наружном кольце.

Для получения функций положения тел и дорожек качения обоих колец эксцентрикового механизма составим расчетную схему (модель) (рис. 1) и примем следующие исходные условия и обозначения: ведущим звеном ЭМК является наружное кольцо; e – эксцентриситет; R_1, R_2 и O_1, O_2 – радиусы и геометрические центры внутреннего и наружного колец; r_0, r_1, r_i и x_0, y_0, x_1, y_1, x_i, y_i – радиусы и координаты центров максимального, первого и i-го тел качения; $X_0O_2Y_0$ – неподвижная декартовая система координат с центром в точке O_2; $S_0(x_0,y_0)$, $S_1(x_1,y_1),...,S_i(x_i,y_i)$ – декартовые системы координат с общим началом в точке O_2, отличающиеся друг от друга на угловые координаты α_i; $S_0'(x_0',y_0')$, $S_1'(x_1',y_1'),...,S_i'(x_i',y_i')$, – декартовые системы координат с общим началом в точке O_1, отличающиеся друг от друга на угловую координату β_i; $S_0''(x_0'',y_0'')$, $S_1''(x_1'',y_1''),...,S_i''(x_i'',y_i'')$ – декартовые системы координат с началом в центрах первого, второго,…, i-го тел качения и отличающиеся друг от друга на угловую координату q_i. Начала отсчета всех системы координат, жестко связанны с геометрическими центрами звеньев ЭМК и лежат в точках расположенных на осях их вращения, а ось Z каждой системы совпадает этими осями. Во всех системах координат $i=1,2,...,n$; а n – число тел качения.

Положение векторов $\tilde{\rho}$ описывающих положения точек C_i, принадлежащих телам и дорожкам качения обоих колец, относительно выбранных систем координат, характеризуются проекциями на координатные оси, которым соответствует набор чисел. Расположим эти цифры в виде столбцов, тогда для каждой системы координат получим ряд матриц, состоящих из одного столбца. Подобные матрицы называются столбцовыми. Переход от одной системы координат к другой осуществим при помощи формул преобразования координат, описываемых матрицами третьего порядка, т. е. матрицами вращения (поворота) и перемещения (сдвига).

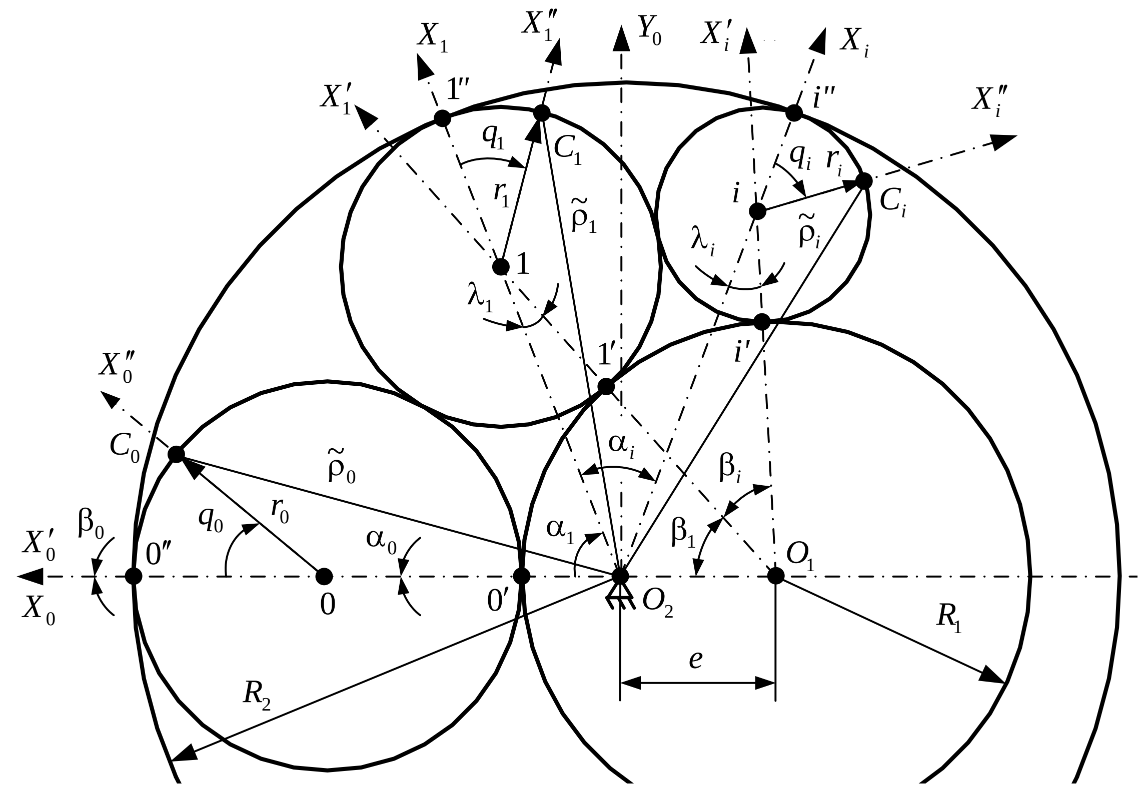

Рисунок 1 – Расчетная схема (модель) ЭМК

При решении данной задачи считаем, что для перехода от системы $S_i''(x_i'', y_i'')$ в систему $S_0(x_0, y_0)$ необходимо выполнить ряд действий. Осуществляем поворот системы координат $S_i(x_i, y_i)$ вокруг оси Z_i на угол α_i до тех пор, пока ось x_i не станет параллельной оси x_0. Затем выполняем поворот системы координат $S_0''(x_0'', y_0'')$ вокруг оси Z_i на угол q_i до тех пор, пока ось x_i'' не станет параллельной оси x_0. Далее выполняем перемещение системы $S_i''(x_i'', y_i'')$ вдоль оси x_0 на величину ($R_2 - r_i$) до тех пор, пока не совпадут начала отсчета рассматриваемых систем координат. Каждому из этих элементарных движений соответствует одна из матриц: либо матрица вращения, либо матрица перемещения.

В результате проделанных действий положение точки C_0 принадлежащей максимальному телу качения относительно неподвижной системы координат $X_0 O_2 Y_0$ определяется вектором $\tilde{\rho}_0$, который в матричной форме принимает вид:

$$\tilde{\rho}_0^{(0)} = A_0^{(1)} \cdot A_0^{(2)} \cdot \tilde{r}_0, \tag{1}$$

где $\tilde{\rho}_0^{(0)}$ и $\tilde{r}_0$ – столбцовые матрицы, $A_0^{(1)}$ – матрица вращения, $A_0^{(2)}$ – матрица вращения и перемещения.

Нижний индекс у параметров, содержащихся в выражении (1), указывает на номер тела качения, а верхний индекс соответствует номеру системы координат, относительно которой определяется положение точки C_0.

Столбцовые матрицы представим в виде

$$\tilde{\rho}_0^{(0)} = \begin{pmatrix} x_0^{(0)} \\ y_0^{(0)} \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{r}_0 = \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица вращения

$$A_0^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_0) & -\sin(\alpha_0) & 0 \\ \sin(\alpha_0) & \cos(\alpha_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица вращения и перемещения

$$A_0^{(2)} = \begin{pmatrix} \cos(q_0) & -\sin(q_0) & R_2 - r_0 \\ \sin(q_0) & \cos(q_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставив данные матрицы в выражение (1) и выполнив соответствующие преобразования, будем иметь:

$$\begin{pmatrix} x_0^{(0)} \\ y_0^{(0)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \cdot \cos(\alpha_0 + q_0) + (R_2 - r_0) \cdot \cos(\alpha_0) \\ r_0 \cdot \sin(\alpha_0 + q_0) + (R_2 - r_0) \cdot \sin(\alpha_0) \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

Преобразовав равенство (2), получим систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x_0^{(0)} = r_0 \cdot \cos(\alpha_0 + q_0) + (R_2 - r_0) \cdot \cos(\alpha_0) \\ y_0^{(0)} = r_0 \cdot \sin(\alpha_0 + q_0) + (R_2 - r_0) \cdot \sin(\alpha_0) \end{cases}. \tag{3}$$

Решение системы параметрических уравнений (3) позволяет определить координаты геометрического центра максимального тела качения, а варьируя значением угла q_0 в интервале от 0 до 2π, получить кривую второго порядка соответствующую рабочей поверхности данного ролика.

Проведя аналогичные действия относительно первого и i-го тела качения, получим системы параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = r_1 \cdot \cos(\theta_1) + \Delta_1 \cdot \cos(\psi_1) \\ y_1^{(0)} = r_1 \cdot \sin(\theta_1) + \Delta_1 \cdot \sin(\psi_1) \end{cases}, \tag{4}$$

где

$$\theta_1 = (\psi_1 + q_1);$$

$$\psi_1 = \alpha_0 + \alpha_1,$$

$$\Delta_1 = R_2 - r_1.$$

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = r_i \cdot \cos(\theta_i) + \Delta_i \cdot \cos(\psi_i) \\ y_i^{(0)} = r_i \cdot \sin(\theta_i) + \Delta_i \cdot \sin(\psi_i) \end{cases}, \tag{5}$$

здесь

$$\theta_i = (\psi_i + q_i),$$

$$\psi_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,$$

$$\Delta_i = R_2 - r_i.$$

Решения систем параметрических уравнений (4) и (5) позволяют определить координаты геометрических центров первого и i-го тел качения, а также варьируя значением угла q_0 в интервале от 0 до 2π, получить кривые второго порядка соответствующие рабочим поверхностям данных звеньев.

Системы параметрических уравнений (3)…(5) совместно составляют математическую модель ЭМК при ведущей дорожке качения наружного кольца.

При рассматриваемых условиях угол поворота q_i для дорожки качения наружного кольца равен нулю ($q_i = 0$), следовательно, система параметрических уравнений (5) примет вид:

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = r_i \cdot \cos(\psi_i) + \Delta_i \cdot \cos(\psi_i) = R_2 \cdot \cos(\psi_i) \\ y_i^{(0)} = r_i \cdot \sin(\psi_i) + \Delta_i \cdot \sin(\psi_i) = R_2 \cdot \sin(\psi_i) \end{cases}. \tag{6}$$

Решение системы параметрических уравнений (6) дает возможность для получения координат положения точки i'' (рис. 1).

С целью проверки правильности системы (6) найдём координаты точки $0''$ принадлежащей дорожке качения наружного кольца. Для этого решим систему параметрических уравнений (6) при следующих условиях: $i = 0$, $r_i = r_0$, $\psi_i = \alpha_0 = 0$, $q_i = 0^0$, $\Delta_0 = R_2 - r_0$. В результате указанных преобразований получим:

$$\begin{cases} x_0^{(0)} = r_0 + R_2 - r_0 = R_2 \\ y_0^{(0)} = 0 \end{cases}. \tag{7}$$

Решение системы (6) при условиях: $i = 1$, $r_i = r_1$, $\psi_i = \alpha_0 + \alpha_1$, $q_i = 0^0$, $\Delta_1 = R_2 - r_1$ получим координаты точки $1''$, принадлежащей дорожке качения наружного кольца:

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = R_2 \cdot \cos(\psi_1) \\ y_1^{(0)} = R_2 \cdot \sin(\psi_1) \end{cases}. \tag{8}$$

Анализ систем (7) и (8) указывает на соответствие полученных координат положений для точек $0''$ и $1''$ с данными расчетной схемы ЭМК, что подтверждает правильность системы (6).

Для получения кривой второго порядка, соответствующей рабочей поверхности дорожки качения внутреннего кольца преобразуем систему уравнений (5) при условии $q_i = 180^0 - \lambda_i$. В этом случае решение системы позволяет получить координаты положения точек контакта ($0', 1', i', ..., n$) любого тела качения с дорожкой качения внутреннего кольца:

- *координаты точки* $0'$:

$$\begin{cases} x_0^{(0)} = r_0 \cdot \cos\left(180^0\right) + \left(R_2 - r_0\right) \cdot \cos\left(0^0\right) = R_2 - 2r_0 = R_1 \\ y_0^{(0)} = r_0 \cdot \sin\left(180^0\right) + \left(R_2 - r_0\right) \cdot \sin\left(0^0\right) = 0 \end{cases},$$

- *координаты точки* i':

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = r_i \cdot \cos\left(\psi_i + 180^0 - \lambda_i\right) + \left(R_2 - r_i\right) \cdot \cos\left(\psi_i\right) \\ y_i^{(0)} = r_i \cdot \sin\left(\psi_i + 180^0 - \lambda_i\right) + \left(R_2 - r_i\right) \cdot \sin\left(\psi_i\right) \end{cases}.$$

Координаты положения центров любого тела качения найдем в результате решения системы (5) при условиях: $\tilde{r}_i = 0$, $q_i = 0^0$:

- *координаты положения центра максимального тела качения*

$$\begin{cases} x_0^{(0)} = \left(R_2 - r_0\right) \cdot \cos\left(0^0\right) = R_2 - r_0 \\ y_0^{(0)} = \left(R_2 - r_0\right) \cdot \sin\left(0^0\right) = 0 \end{cases},$$

- *координаты положения центра* i*-го тела качения*

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \left(R_2 - r_i\right) \cdot \cos\left(\psi_i\right) \\ y_i^{(0)} = \left(R_2 - r_i\right) \cdot \sin\left(\psi_i\right) \end{cases}.$$

В результате проделанных действий получены системы параметрических уравнений (3)…(5) совместно составляющие математическую модель ЭМК при ведущем наружном кольце, решение которой дает возможность однозначного определения положений всех звеньев эксцентрикового механизма качения на плоскости в требуемый момент времени, что создает возможность для решения задач кинематического и силового исследований.