УДК 62–231.1

СОЗДАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КИНЕМАТИКОЙ

Гюнтер А.Н.
Научный руководитель – д.т.н., профессор Смирнов Н.А.

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева

В последнее время в области машиностроения расширяется применение механизмов с параллельной кинематикой. Технологическое оборудование, построенное на базе таких механизмов, в значительной степени обеспечивает высокую производительность, надёжность и точность. Принцип параллельной кинематики заключается в том, что исполнительный орган (выходное звено) связан с основанием замкнутыми кинематическими цепями, каждая из которых имеет несколько приводов или налагает какие-либо связи на движение выходного звена. Исходя из этого такие механизмы, в отличие от традиционных манипуляторов, воспринимают нагрузку как пространственные фермы, что ведёт к повышению точности, грузоподъёмности и жесткости всей конструкции.

Существует довольно большое количество различных компоновок плоских механизмов с параллельной кинематикой, в основном отличающихся друг от друга количеством приводов выходного звена и соответственно степенью подвижности. Рассмотрим механизм с двумя приводами, показанный на рисунке 1, имеющий две степени подвижности, который наиболее наглядно отражает принцип параллельной кинематики. В роли приводов совершающих возвратно-поступательное движение, здесь выступают первое (ℓ_1) и третье (ℓ_3) звенья. Они могут изменять свою длину в некотором диапазоне, независимо друг от друга. Математическая модель данного механизма должна отражать зависимость положения выходного звена, от длин приводных звеньев. Для создания такой модели введём две системы координат, как показано на рисунке 1, один центр которой будет расположен на основании механизма в точке О, а другой в точке О’, находящейся на середине выходного звена (ℓ_2).

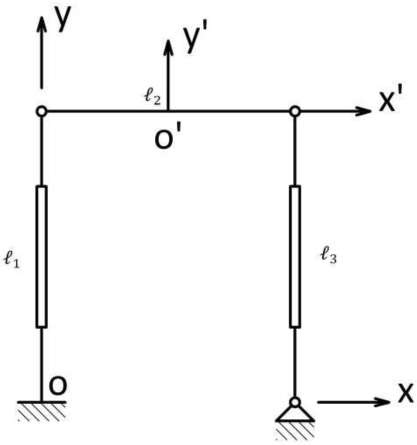

Рисунок 1. Плоский механизм параллельной структуры с двумя приводами.

За первоначальное положение, примем положение механизма, как показано на рисунке 1, при котором длины первого (ℓ_1) и третьего (ℓ_3) звеньев равны, а длина второго (ℓ_2) звена равна расстоянию между точкой О и шарниром, на котором закреплено третье звено. Таким образом, механизм принимает форму прямоугольника. Определение положения выходного

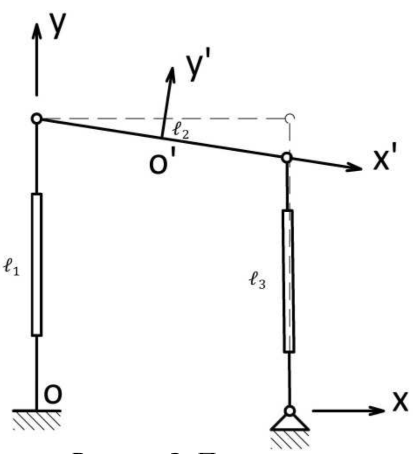

Рисунок 2. Произвольное положение механизма.

звена (ℓ_2), относительно системы координат OXY, в данном положении не представляет никакой сложности.

Предположим, что длины первого и третьего звеньев уменьшились на некоторую, различную друг от друга, длину, и механизм принял положение как показано на рисунке 2. Исходя из рисунка 2, составим две системы треугольников, представленные на рисунках 3 и 4. Рисунок 4 понадобится лишь для определения обратной зависимости, т.е. по известному положению выходного звена в дальнейшем определим длины приводных звеньев.

Из рисунка 3, определим угол отклонения оси O'X' от оси OX (O'Y' от оси OY) и координаты положения точки O' относительно OXY. Зная длины всех звеньев, с помощью теоремы косинусов, определим углы α и β:

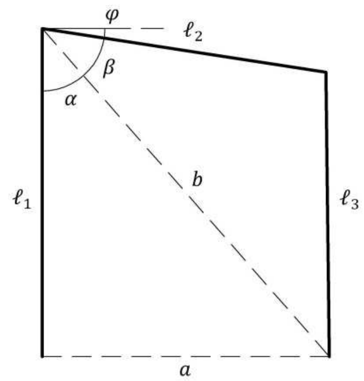

Рисунок 3. Геометрическая модель произвольного положения механизма.

в нашем случае $a = \ell_2$;

$$b = \sqrt{\ell_1^2 + a^2} = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2};$$

$$a^2 = \ell_1^2 + b^2 - 2 \times \ell_1 \times b \times \cos\alpha;$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\ell_1^2 + \left(\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}\right)^2 - \ell_2^2}{2 \times \ell_1 \times \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}}\right);$$

$$\ell_3^2 = b^2 + \ell_2^2 - 2 \times b \times \ell_2 \times \cos\beta;$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\left(\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}\right)^2 + \ell_2^2 - \ell_3^2}{2 \times \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2} \times \ell_2}\right);$$

$$\varphi = 90 - \alpha - \beta = 90 - \arccos\left(\frac{\ell_1^2 + \left(\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}\right)^2 - \ell_2^2}{2 \times \ell_1 \times \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}}\right) - \arccos\left(\frac{\left(\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}\right)^2 + \ell_2^2 - \ell_3^2}{2 \times \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2} \times \ell_2}\right).$$

После нахождения угла отклонения φ определим координаты положения точки O':

$$x = \frac{\ell_2}{2} \times \cos\varphi; \; y = \ell_1 - \frac{\ell_2}{2} \times \sin\varphi.$$

При нахождении обратной зависимости, имеем координаты положения точки O'(x,y), и угол отклонения φ. По этим данным, воспользовавшись рисунком 4, находим длины первого (ℓ_1) и третьего (ℓ_3) звеньев:

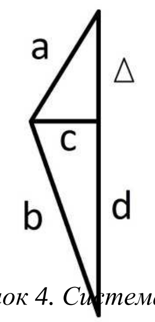

Рисунок 4. Система треугольников, связывающая первоначальное положение механизма с произвольным положением.

здесь $b = \ell_3$;

$$\frac{\ell_2}{2} = \frac{x}{\cos\varphi}; \; \ell_1 = y + \frac{\ell_2}{2} \times \sin\varphi = y + \frac{x \times \sin\varphi}{\cos\varphi};$$

$$\ell_3 = \sqrt{c^2 + d^2};$$

$$c = \ell_2 - \ell_2 \times \cos\varphi = \frac{2 \times x}{\cos\varphi} - 2 \times x = 2 \times x \times \left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right);$$

$$d = \ell_1 - \ell_2 \times \sin\varphi = y + \frac{x \times \sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{2 \times x \times \sin\varphi}{\cos\varphi} = y - \frac{x \times \sin\varphi}{\cos\varphi};$$

$$\ell_3 = \sqrt{\left(2 \times x \times \left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right)\right)^2 + \left(y - \frac{x \times \sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^2}.$$

Подобного рода математическое описание различных механизмов параллельной кинематики, в дальнейшем непосредственно используется в системах управления этими механизмами, что позволяет осуществлять необходимый закон движения выходного звена, и выполнения механизмом различных функций.