

**ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ИЗГИБА
ПОЛОГИХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ ИЗОТРОПНЫХ
РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ**

Делягин М.Ю.

Научный руководитель – профессор Трещев А.А.

ГОУ ВПО Тульский государственный университет

Используя методику, предложенную Н. М. Матченко и А. А. Трещевым, в рамках закона теплопроводности Фурье, классических условий динамического равновесия и гипотез Кирхгофа-Лява были получены разрешающие уравнения для решения связанной задачи об изгибе при больших прогибах сферических оболочек из изотропных разносопротивляющихся материалов в условиях термомеханического нагружения. Разрешающая система уравнений состоит из трех нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных: двух уравнений равновесия и уравнения теплопроводности. Их линеаризация методом последовательных нагружений довольно проблематична, а последующее численное решение связано со значительными затратами машинного времени. Поэтому рекомендуется проводить линеаризацию на начальном этапе построения уравнений. Тогда уравнение теплопроводности (1) и уравнения равновесия (2) и (3) в цилиндрической системе координат в перемещениях после линеаризации имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & \lambda(\delta\theta^\circ)_{,zz} - C_\sigma(\delta\theta^\circ)_{,t} - (\delta u)_{,rt} T_0 \left[A_t (B_{11} + B_{21}) + B_t (\alpha_r B_{11} + \alpha_\varphi B_{21}) \right] - \\
 & - (\delta w)_{,t} T_0 \left[A_t k (B_{11} + B_{21}) + \frac{A_t}{r} (B_{12} + B_{22}) + \right. \\
 & \left. + B_t \left(\alpha_r B_{11} k + \frac{\alpha_r B_{12}}{r} + \alpha_\varphi B_{21} k + \frac{\alpha_\varphi B_{22}}{r} \right) \right] + \\
 & + (\delta w)_{,rt} T_0 \left[A_t w_{,r} (B_{11} + B_{21}) - \frac{A_t z}{r} (B_{12} + B_{22}) + B_t \alpha_r \left(B_{11} w_{,r} - \frac{z B_{12}}{r} \right) + \right. \\
 & \left. + B_t \alpha_\varphi \left(B_{21} w_{,r} - \frac{z B_{22}}{r} \right) \right] + \\
 & + (\delta w)_{,rrt} T_0 \left[A_t (B_{11} + B_{21}) z + B_t \alpha_r B_{11} z + B_t \alpha_\varphi B_{21} z \right] - \\
 & - (\delta u)_{,t} T_0 \left[\frac{A_t}{r} (B_{12} + B_{22}) + \frac{B_t \alpha_r B_{12}}{r} + \frac{B_t \alpha_\varphi B_{22}}{r} \right] + U - \\
 & - (\delta u)_{,r} T_0 \left(A_t (B_{11} + B_{21})_{,t} + B_t \alpha_{r,t} B_{11} + B_t \alpha_{\varphi,t} B_{21} + B_t \alpha_r B_{11,t} + B_t \alpha_\varphi B_{21,t} \right) - \\
 & - T_0 (\delta u) / r \left(A_t (B_{12} + B_{22})_{,t} + B_t \alpha_{r,t} B_{12} + B_t \alpha_{\varphi,t} B_{22} + B_t \alpha_r B_{12,t} + B_t \alpha_\varphi B_{22,t} \right) + \\
 & + z T_0 (\delta w)_{,rr} \left(A_t (B_{11} + B_{21})_{,t} + B_t \alpha_{r,t} B_{11} + B_t \alpha_{\varphi,t} B_{21} + B_t \alpha_r B_{11,t} + B_t \alpha_\varphi B_{21,t} \right) -
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
& -(\delta w)T_0 \left[k \left(A_t (B_{11} + B_{21})_{,t} + B_t \alpha_{r,t} B_{11} + B_t \alpha_{\varphi,t} B_{21} + B_t \alpha_r B_{11,t} + B_t \alpha_\varphi B_{21,t} \right) + \right. \\
& \left. + \left(A_t (B_{12} + B_{22})_{,t} + B_t \alpha_{r,t} B_{12} + B_t \alpha_{\varphi,t} B_{22} + B_t \alpha_r B_{12,t} + B_t \alpha_\varphi B_{22,t} \right) / r \right] + \\
& + (\delta w)_{,r} T_0 \left[\frac{z}{r} \left(A_t (B_{12} + B_{22})_{,t} + B_t \alpha_{r,t} B_{12} + B_t \alpha_{\varphi,t} B_{22} + B_t \alpha_r B_{12,t} + B_t \alpha_\varphi B_{22,t} \right) - \right. \\
& \left. - w_{,r} \left(A_t (B_{11} + B_{21})_{,t} + B_t \alpha_{r,t} B_{11} + B_t \alpha_{\varphi,t} B_{21} + B_t \alpha_r B_{11,t} + B_t \alpha_\varphi B_{21,t} \right) \right] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& J_{11} (\delta w)_{,rrrr} + \left(J_{12} - \frac{J_{21}}{r} + 2J_{11,r} \right) (\delta w)_{,rrr} + \\
& + \left(J_{13} - \frac{1}{r} J_{22} - \frac{1}{r^2} (J_{11} - J_{21}) - k(I_{11} + I_{21}) + \right. \\
& \left. + w_{,rr} I_{11} + N_r - \frac{1}{r} J_{21,r} + J_{11,rr} + 2J_{12,r} \right) (\delta w)_{,rr} + \\
& + \left(w_{,rr} I_{12} - \frac{J_{23}}{r} - \frac{J_{12} - J_{22}}{r^2} - k(I_{12} + I_{22}) - \frac{1}{r} J_{22,r} + J_{12,rr} + 2J_{13,r} \right) (\delta w)_{,r} + \quad (2) \\
& + \left(w_{,rr} I_{13} - \frac{1}{r^2} (J_{13} - J_{23}) - k(I_{13} + I_{23}) - \frac{1}{r} J_{23,r} + J_{13,rr} \right) (\delta w) + J_{14} (\delta u)_{,rrr} + \\
& + \left(J_{15} - \frac{J_{24}}{r} + 2J_{14,r} \right) (\delta u)_{,rr} + \left(w_{,rr} I_{14} - \frac{1}{r} J_{25} - \frac{J_{14} - J_{24}}{r^2} - k(I_{14} + I_{24}) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{r} J_{24,r} + J_{14,rr} + 2J_{15,r} \right) (\delta u)_{,r} + \\
& + \left(w_{,rr} I_{15} - \frac{J_{15} - J_{25}}{r^2} - k(I_{15} + I_{25}) - \frac{1}{r} J_{25,r} + J_{15,rr} \right) (\delta u) = -\delta q; \\
& (I_{11} + kJ_{11}) (\delta w)_{,rrr} + \left(I_{12} + \frac{I_{11} - I_{21}}{r} + kJ_{12} + \frac{k}{r} (J_{11} - J_{21}) + I_{11,r} + kJ_{11,r} \right) (\delta w)_{,rr} + \\
& + \left(I_{13} + \frac{I_{12} - I_{22}}{r} + kJ_{13} + \frac{k}{r} (J_{12} - J_{22}) + I_{12,r} + kJ_{12,r} \right) (\delta w)_{,r} + \\
& + \left(\frac{I_{13} - I_{23}}{r} + \frac{k}{r} (J_{13} - J_{23}) + I_{13,r} + kJ_{13,r} \right) (\delta w) + (I_{14} + kJ_{14}) (\delta u)_{,rr} + \quad (3) \\
& + \left(I_{15} + \frac{I_{14} - I_{24}}{r} + kJ_{15} + \frac{k}{r} (J_{14} - J_{24}) + I_{14,r} + kJ_{14,r} \right) (\delta u)_{,r} + \\
& + \left(\frac{I_{15} - I_{25}}{r} + \frac{k}{r} (J_{15} - J_{25}) + I_{15,r} + kJ_{15,r} \right) (\delta u) = 0,
\end{aligned}$$

где δw - приращение прогиба, δu - приращение радиального перемещения, $\delta \theta^\circ$ - приращение изменения температуры, λ - коэффициент теплопроводности, C_σ - теплоемкость материала при постоянном напряжении, T_0 - начальная температура, A, B, C, D, A_t, B_t - константы потенциала Гиббса, определяемые из опытов по одноосному сжатию и растяжению образцов при постоянной и переменной

температуре, $A = 0,5(1/E^+ + 1/E^-)$, $B = 0,5(1/E^+ - 1/E^-)$,
 $C = -0,5(v^+/E^+ + v^-/E^-)$, $D = -0,5(v^+/E^+ - v^-/E^-)$, $A_t = 0,5(\alpha_{t1}^+ + \alpha_{t1}^-)$,
 $B_t = 0,5(\alpha_{t1}^+ - \alpha_{t1}^-)$, $E^+, E^-, \nu^+, \nu^-, \alpha_{t1}^+, \alpha_{t1}^-$ - модуль упругости, коэффициент Пуассона
и коэффициент линейного теплового расширения материала при одноосном
растяжении (+) и одноосном сжатии (-) соответственно, k - кривизна оболочки, α_r, α_φ
- нормированные напряжения, $\alpha_r = \sigma_r / S$, $\alpha_\varphi = \sigma_\varphi / S$, $S = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2}$ - модуль
вектора полного напряжения, U - удельная мощность источников тепла,

$$\begin{aligned}
I_{11} &= - \int_{-h/2}^{h/2} z B_{11} dz; & I_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(B_{11} w_{,r} - \frac{z}{r} B_{12} \right) dz; & I_{13} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(k B_{11} + \frac{B_{12}}{r} \right) dz; \\
I_{14} &= \int_{-h/2}^{h/2} B_{11} dz; & I_{15} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{B_{12}}{r} dz; & I_{21} &= - \int_{-h/2}^{h/2} z B_{21} dz; & I_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(B_{21} w_{,r} - \frac{z}{r} B_{22} \right) dz; \\
I_{23} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(k B_{21} + \frac{B_{22}}{r} \right) dz; & I_{24} &= \int_{-h/2}^{h/2} B_{21} dz; & I_{25} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{B_{22}}{r} dz; & J_{11} &= - \int_{-h/2}^{h/2} z^2 B_{11} dz; \\
J_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(B_{11} w_{,r} - \frac{z}{r} B_{12} \right) z dz; & J_{13} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(k B_{11} + \frac{B_{12}}{r} \right) z dz; & J_{14} &= \int_{-h/2}^{h/2} B_{11} z dz; \\
J_{15} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{B_{12}}{r} z dz; & J_{21} &= - \int_{-h/2}^{h/2} z^2 B_{21} dz; & J_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(B_{21} w_{,r} - \frac{z}{r} B_{22} \right) z dz; \\
J_{23} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(k B_{21} + \frac{B_{22}}{r} \right) z dz; & J_{24} &= \int_{-h/2}^{h/2} B_{21} z dz; & J_{25} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{B_{22}}{r} z dz; \\
B_{11} &= \Delta_{22} / \Delta; & B_{12} = B_{21} &= -\Delta_{21} / \Delta = -\Delta_{12} / \Delta; & B_{22} &= \Delta_{11} / \Delta; & \Delta &= \Delta_{11} \Delta_{22} - \Delta_{12} \Delta_{21}; \\
\Delta_{11} &= \frac{\partial e_r}{\partial \sigma_r} = A + B(\alpha_r^3 + 2\alpha_r \alpha_\varphi^2) + D\alpha_\varphi^3 - D\alpha_r \alpha_\varphi^2 + \\
&+ (0,5B - D)[\alpha_r^3 + 2\alpha_r \alpha_\varphi^2 - \alpha_r^5 - \alpha_\varphi^5 - 4\alpha_r^3 \alpha_\varphi^2 + 2\alpha_r^2 \alpha_\varphi^3] + B_t \theta^\circ \alpha_\varphi / S; \\
\Delta_{12} = \Delta_{21} &= \frac{\partial e_r}{\partial \sigma_\varphi} = \frac{\partial e_\varphi}{\partial \sigma_r} = C - B\alpha_r^2 \alpha_\varphi + D(2\alpha_r \alpha_\varphi + \alpha_r^3 + \alpha_\varphi^3) + \\
&+ (0,5B - D)[- \alpha_\varphi \alpha_r^2 + 3\alpha_r^4 \alpha_\varphi - 3\alpha_r^3 \alpha_\varphi^2] - B_t \theta^\circ \alpha_r \alpha_\varphi / S; \\
\Delta_{12} = \Delta_{21} &= \frac{\partial e_r}{\partial \sigma_\varphi} = \frac{\partial e_\varphi}{\partial \sigma_r} = A + B(\alpha_\varphi^3 + 2\alpha_r^2 \alpha_\varphi) + D\alpha_r^3 - D\alpha_r^2 \alpha_\varphi + \\
&+ (0,5B - D)[\alpha_\varphi^3 + 2\alpha_\varphi \alpha_r^2 - \alpha_\varphi^5 - \alpha_r^5 - 4\alpha_r^2 \alpha_\varphi^3 + 2\alpha_r^3 \alpha_\varphi^2] + B_t \theta^\circ \alpha_r / S.
\end{aligned}$$

Функции B_{ij}, I_{ij}, J_{ij} в уравнениях (1), (2), (3) определяются по напряженно деформированному состоянию оболочки, накопленному к рассматриваемому этапу нагружения. В отличие от традиционной методики последовательных нагружений для повышения точности решения исходной задачи с учетом физической и геометрической нелинейности на первом шаге нагружения после решения классической задачи рекомендуется учесть влияние разнородности оболочки на ее напряженно-деформированное состояние. Для этой цели на первом шаге достаточно решить задачу о малом изгибе оболочки с учетом лишь физической нелинейности.

Решая задачу на каждом этапе нагружения два раза с различными коэффициентами, согласно двухшаговому методу последовательных возмущений параметров В.В. Петрова, мы сможем, не снижая точности, увеличить шаг по нагрузке и уменьшить затраты времени на решение.

Граничные условия для жесткой заделки по контуру запишутся в приращениях следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta w &= 0; \\ (\delta w)_{,r} &= 0; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\delta u = 0.$$

Температурные начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \theta^\circ(z = h/2) &= \theta_v; \\ \theta^\circ(z = -h/2) &= \theta_n, \end{aligned} \tag{5}$$

где h - толщина оболочки, θ_v - изменение температуры на верхней поверхности оболочки, θ_n - изменение температуры на нижней поверхности оболочки.

Уравнения (1), (2), (3), (4), (5) образуют разрешающую систему линейных дифференциальных уравнений в приращениях, описывающих изгиб пологих сферических оболочек из изотропных разносопротивляющихся материалов в условиях термомеханического нагружения. От нее с помощью метода конечных разностей перейдем к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решение СЛАУ будет производиться в среде MATLAB (MathWorks Inc., USA).

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Осипова Е.В.

Научный руководитель – к. ф.-м. н., доцент Черкунова Н.Г.

Хакасский Технический институт-филиал СФУ

Дифференциальные уравнения, полученные в результате исследования какого-либо реального процесса или явления образуют дифференциальную модель. В строительстве, как правило, применяются дифференциальные модели, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Важную роль в теории упругости имеет определение формы упругой линии. Определим уравнение упругой линии.

В сопротивлении материалов доказывается, что изгибающий момент $M(x)$ в положении x связан с радиусом кривизны упругой линии обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка

$$EJ \frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} = M(x),$$

где E – модуль упругости Юнга, J – момент инерции поперечного сечения балки в положении x относительно горизонтальной прямой, проходящей через центр тяжести этого поперечного сечения. Жёсткость при изгибе EJ считаем постоянной.

На практике балка лишь слегка прогибается, следовательно, угловой коэффициент y' упругой линии очень мал и, поэтому, можно рассматривать приближённое дифференциальное уравнение

$$EJy'' = M(x) \quad (1)$$

Рассмотрим горизонтальную однородную балку длины l , свободно лежащую на двух опорах, которая прогибается под действием собственного веса p .

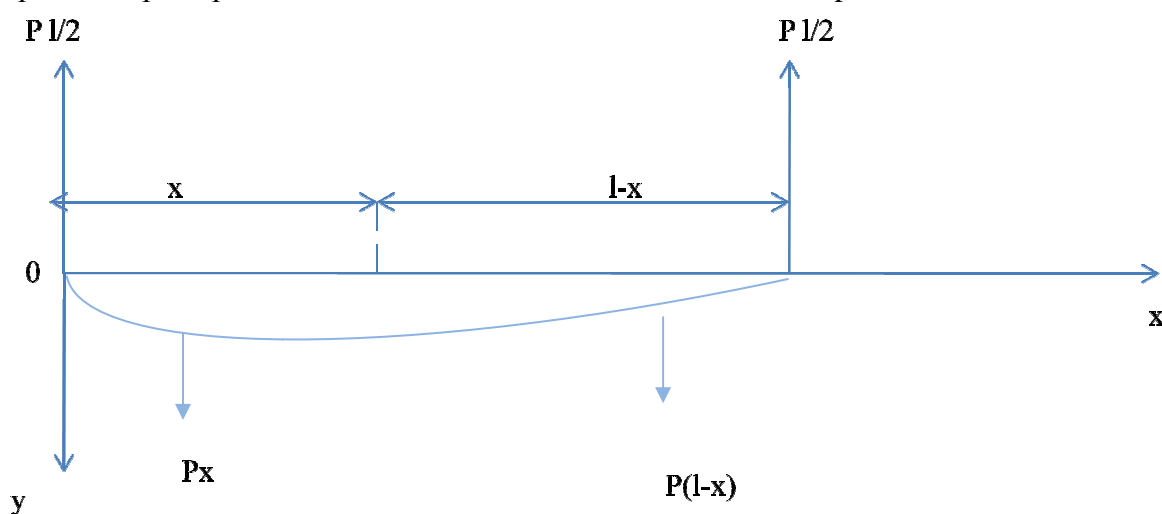


Рис.1. Моменты сил, действующих на балку.

Поскольку балка лежит на двух опорах, то каждая из опор создаёт направленную вверх реакцию. (Рис.1). Вычисляя $M(x)$ как алгебраическую сумму моментов этих сил получаем

$$M(x) = \frac{px^2}{2} - \frac{plx}{2}.$$

Дифференциальное уравнение (1) принимает вид

$$EJy'' = \frac{px^2}{2} - \frac{plx}{2} \quad (2)$$

Учитываем, что на концах балка не прогибается, т.е. $y = 0$ при $x = 0$ и $y = 0$ при $x=l$.

Интегрируя уравнение (2) с учётом последних условий, получаем уравнение упругой линии

$$y = \frac{p}{24EJ}(x^4 - 2lx^3 + l^3x)$$

Его можно использовать на практике, например, для определения максимального прогиба балки.