УДК 621.3.011.7 (075.8)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОЩНОСТИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ТОКА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Денисенко В.С., Мосейчук Р.С.
Научный руководитель – канд. техн. наук, доцент Копылов А.Ф.

Сибирский федеральный университет

При изложении материала по дисциплине «Основы теории цепей» (ОТЦ) и родственным ей дисциплинам («Теоретические основы электротехники» (ТОЭ), «Основы электротехники и электроники» (ОЭ и Э) и т.д.), у внимательного читателя возникает вопрос о технике получении выражений, описывающих мощность гармонического тока в комплексной форме. Этот вопрос возникает не случайно. При его подробном изучении оказывается, что подробное рассмотрение процесса получения решения для записи мощности гармонического тока в комплексной форме обходят стороной как авторы современных учебников и учебных пособий, так и основоположники теории электрических цепей и электротехники. Как правило, в широко доступных студентам работах (учебники, учебные пособия) в том или ином виде дается результирующая формула для определения мощности гармонического тока в комплексной форме $\dot{P}$ через комплексные амплитуды тока в цепи $\dot{I}_m$ и напряжения на ней $\dot{U}_m$ и комплексно сопряженные с ними величины $\overset{*}{I}_m$ и $\overset{*}{U}_m$:

$$\begin{aligned}\dot{P} = P + j\cdot Q = \frac{1}{4}\cdot\left\{\dot{U}_m\cdot\overset{*}{I}_m+\overset{*}{U}_m\cdot\dot{I}_m\right\}+j\cdot\frac{1}{4\cdot j}\cdot\left\{\dot{U}_m\cdot\overset{*}{I}_m-\overset{*}{U}_m\cdot\dot{I}_m\right\}= \\ =\frac{1}{4}\cdot\left\{2\cdot\dot{U}_m\cdot\overset{*}{I}_m\right\}=\frac{1}{2}\cdot\left\{\dot{U}_m\cdot\overset{*}{I}_m\right\}=\dot{U}_{Д}\cdot\overset{*}{I}_{Д}\end{aligned}, \qquad (1)$$

где $\dot{P}$ – комплексная мощность в цепи гармонического тока, [ВА]; P – активная мощность в цепи гармонического тока, [Вт]; Q – реактивная мощность в цепи гармонического тока, [вар]; $\dot{I}_m$ и $\overset{*}{I}_m$ – комплексная амплитуда и сопряженная с ней величина тока в цепи (ветви схемы), для которой определяется мощность, [А]; $\dot{U}_m$ и $\overset{*}{U}_m$ – комплексная амплитуда и сопряженная с ней величина падения напряжения на цепи (ветви схемы), для которой определяется мощность, [В]; $\overset{*}{I}_{Д}$ – величина, комплексно сопряженная с действующим значением комплексной амплитуды тока цепи (ветви), для которой определяется мощность, [А]; $\dot{U}_{Д}$ – действующее значение комплексной амплитуды падения напряжения на цепи (ветви схемы), для которой определяется мощность, [В].

Для выяснения технических тонкостей получения выражения (1), авторы настоящей работы осуществили его подробный вывод, показав некоторые особенности перехода от гармонических функций мощности гармонического тока к её комплексному изображению, а также определив физические соображения, позволяющие произвести такой переход.

Положим, что гармоническая функция тока в цепи записана как $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$, а напряжение как $U(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$. Тогда мгновенное значение мощности гармонического тока $P(t)$ будет равно:

$$P(t) = [I_m \cdot U_m] \cdot [\sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)]. \tag{2}$$

Или в виде, содержащем сумму мгновенной поглощаемой мощности $P_{\text{ПОГЛ}}(t)$ и мгновенной поступающей на реактивные элементы мощности $Q_{\text{ПОСТ}}(t)$:

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos\varphi \cdot [1 - \cos(2 \cdot \omega \cdot t)] + \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \sin\varphi \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) = \\ &= P_{\text{ПОГЛ}}(t) + Q_{\text{ПОСТ}}(t) = P \cdot [1 - \cos(2 \cdot \omega \cdot t)] + Q \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \end{aligned}. \tag{3}$$

Полного эквивалента выражению (3) в комплексной форме авторам подобрать не удалось из-за неполного соответствия комплексных изображений исходным гармоническим функциям. Такое несоответствие возникает, когда появляется необходимость физической интерпретации комплексных операторов вращения вида $e^{j \cdot \omega \cdot t}$ и $e^{j \cdot 2 \cdot \omega \cdot t}$, появляющихся при преобразованиях синусоидальных функций времени тока, напряжения и мощности. В частности, при изображении гармонических множителей в выражении (3), оператор вращения $e^{j \cdot 2 \cdot \omega \cdot t}$ может изображать как синусоидальный множитель $\sin(2 \cdot \omega \cdot t)$, так и косинусоидальный множитель $[1 - \cos(2 \cdot \omega \cdot t)]$. Это приводит к неоднозначности в изображении в области комплексной переменной исходных гармонических функций. По этой причине при преобразовании функций времени (3) в комплексную форму приходится опускать гармонические множители и преобразовывать только активную P и реактивную Q мощности.

Преобразование активной составляющей P комплексной мощности $\dot{P}$ цепи гармонического тока дает четыре возможных варианта выражений для активной мощности через комплексные $\dot{I}_m$, $\dot{U}_m$ и сопряженные с ними $\overset{*}{I}_m$, $\overset{*}{U}_m$ величины токов и напряжений:

$$\begin{aligned} &P = \frac{1}{4} \cdot \left\{ \dot{U}_m \cdot \dot{I}_m + \overset{*}{U}_m \cdot \dot{I}_m \right\}; \; P = \frac{1}{4} \cdot \left\{ \dot{U}_m \cdot \overset{*}{I}_m + \overset{*}{U}_m \cdot \overset{*}{I}_m \right\}; \\ &P = \frac{1}{4} \cdot \left\{ \dot{U}_m \cdot \dot{I}_m + \overset{*}{U}_m \cdot \overset{*}{I}_m \right\}; \; P = \frac{1}{4} \cdot \left\{ \dot{U}_m \cdot \overset{*}{I}_m + \overset{*}{U}_m \cdot \dot{I}_m \right\}. \end{aligned} \tag{4}$$

В результате подстановки в каждое из выражений (4) величин $\dot{I}_m$, $\overset{*}{I}_m$, $\dot{U}_m$ и $\overset{*}{U}_m$, выраженных через их реальные и мнимые составляющие, получается:

$$P = \frac{1}{4} \cdot \left\{ \dot{U}_m \cdot \dot{I}_m + \overset{*}{U}_m \cdot \dot{I}_m \right\} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \mathrm{Re}[\dot{U}_m] \cdot \mathrm{Re}[\dot{I}_m] + j \cdot \mathrm{Im}[\dot{I}_m] \cdot \mathrm{Re}[\dot{U}_m] \right\}, \tag{5}$$

$$P=\frac{1}{4}\cdot\left\{\dot{U}_m\cdot\overset{*}{I}_m+\overset{*}{U}_m\cdot\overset{*}{I}_m\right\}=\frac{1}{2}\cdot\left\{\mathrm{Re}\left[\dot{U}_m\right]\cdot\mathrm{Re}\left[\dot{I}_m\right]-j\cdot\mathrm{Im}\left[\dot{I}_m\right]\cdot\mathrm{Re}\left[\dot{U}_m\right]\right\},\tag{6}$$

$$P=\frac{1}{4}\cdot\left\{\dot{U}_m\cdot\dot{I}_m+\overset{*}{U}_m\cdot\overset{*}{I}_m\right\}=\frac{1}{2}\cdot\left\{\mathrm{Re}\left[\dot{U}_m\right]\cdot\mathrm{Re}\left[\dot{I}_m\right]-\mathrm{Im}\left[\dot{U}_m\right]\cdot\mathrm{Im}\left[\dot{I}_m\right]\right\},\tag{7}$$

$$P=\frac{1}{4}\cdot\left\{\dot{U}_m\cdot\overset{*}{I}_m+\overset{*}{U}_m\cdot\dot{I}_m\right\}=\frac{1}{2}\cdot\left\{\mathrm{Re}\left[\dot{U}_m\right]\cdot\mathrm{Re}\left[\dot{I}_m\right]+\mathrm{Im}\left[\dot{U}_m\right]\cdot\mathrm{Im}\left[\dot{I}_m\right]\right\},\tag{8}$$

где $\mathrm{Re}\left[\dot{I}_m\right]$, $\mathrm{Im}\left[\dot{I}_m\right]$ – действительная и мнимая части комплексной амплитуды тока цепи (ветви); $\mathrm{Re}\left[\dot{U}_m\right]$, $\mathrm{Im}\left[\dot{U}_m\right]$ – действительная и мнимая части комплексной амплитуды напряжения на цепи (на ветви), для которой определяется мощность.

Первое (5) и второе (6) уравнения этой системы не могут быть выражениями для нахождения активной мощности P в цепи гармонического тока, так как в составе этих выражений есть мнимая составляющая, которую активная мощность P физически содержать не может.

Третье (7) уравнение системы допускает чисто техническое получение отрицательной мощности, не обусловленной несовпадением направлений тока и напряжения в цепи (ветви): $-\mathrm{Im}\left[\dot{U}_m\right]\cdot\mathrm{Im}\left[\dot{I}_m\right]$. Такая возможность решения уравнения для нахождения активной мощности P в цепи гармонического тока также не соответствует физическому смыслу активной мощности P.

Всем физическим соображениям и ограничениям для активной мощности P соответствует только четвертое (8) уравнение: это уравнение не содержит мнимых составляющих, и не содержит элементов, допускающих появления отрицательной мощности, не обусловленной несовпадением направлений тока и напряжения в цепи (ветви).

Аналогичное выполненному выше преобразованию для активной мощности в комплексной форме (4), преобразование можно осуществить для реактивной составляющей Q комплексной мощности $\dot{P}$. Преобразование реактивной составляющей Q комплексной мощности $\dot{P}$ цепи гармонического тока также дает четыре возможных варианта выражений для реактивной мощности через комплексные и сопряженные с ними токи и напряжения:

$$Q=\frac{1}{4\cdot j}\cdot\left\{\dot{U}_m\cdot\dot{I}_m-\overset{*}{U}_m\cdot\dot{I}_m\right\};\ Q=\frac{1}{4\cdot j}\cdot\left\{\dot{U}_m\cdot\overset{*}{I}_m-\overset{*}{U}_m\cdot\overset{*}{I}_m\right\};$$
$$Q=\frac{1}{4\cdot j}\cdot\left\{\dot{U}_m\cdot\dot{I}_m-\overset{*}{U}_m\cdot\overset{*}{I}_m\right\};\ Q=\frac{1}{4\cdot j}\cdot\left\{\dot{U}_m\cdot\overset{*}{I}_m-\overset{*}{U}_m\cdot\dot{I}_m\right\}.\tag{9}$$

В результате подстановки в каждое из выражений (9) величин $\dot{I}_m$, $\overset{*}{I}_m$, $\dot{U}_m$ и $\overset{*}{U}_m$, выраженных через их реальные и мнимые составляющие, получим:

$$Q=\frac{1}{4\cdot j}\cdot\left\{\dot{U}_m\cdot\dot{I}_m-\overset{*}{U}_m\cdot\dot{I}_m\right\}=\frac{1}{2\cdot j}\cdot\left\{-\mathrm{Im}\left[\dot{U}_m\right]\cdot\mathrm{Im}\left[\dot{I}_m\right]+j\cdot\mathrm{Im}\left[\dot{I}_m\right]\cdot\mathrm{Re}\left[\dot{U}_m\right]\right\},\tag{10}$$

$$Q = \frac{1}{4 \cdot j} \cdot \left\{ \dot{U}_m \cdot \overset{*}{I}_m - \overset{*}{U}_m \cdot \overset{*}{I}_m \right\} = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot \left\{ \mathrm{Im}\left[\dot{U}_m\right] \cdot \mathrm{Im}\left[\dot{I}_m\right] + j \cdot \mathrm{Im}\left[\dot{U}_m\right] \cdot \mathrm{Re}\left[\dot{I}_m\right] \right\}, \tag{11}$$

$$Q = \frac{1}{4 \cdot j} \cdot \left\{ \dot{U}_m \cdot \dot{I}_m - \overset{*}{U}_m \cdot \overset{*}{I}_m \right\} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \mathrm{Im}\left[\dot{I}_m\right] \cdot \mathrm{Re}\left[\dot{U}_m\right] + \mathrm{Im}\left[\dot{U}_m\right] \cdot \mathrm{Re}\left[\dot{I}_m\right] \right\}, \tag{12}$$

$$Q = \frac{1}{4 \cdot j} \cdot \left\{ \dot{U}_m \cdot \overset{*}{I}_m - \overset{*}{U}_m \cdot \dot{I}_m \right\} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ -\mathrm{Im}\left[\dot{I}_m\right] \cdot \mathrm{Re}\left[\dot{U}_m\right] + \mathrm{Im}\left[\dot{U}_m\right] \cdot \mathrm{Re}\left[\dot{I}_m\right] \right\}. \tag{13}$$

Проанализируем уравнения (10) – (13), полученные для реактивной мощности Q в комплексной форме, с точки зрения их физического смысла.

Уравнения (10) и (11) не могут выражать реактивную мощность, так как они содержат, наряду с реактивными, и активные составляющие, а это физически невозможно.

Выражение (12), хотя и не содержит действительных составляющих, как это было ранее в выражениях (10) и (11), и, на первый взгляд, может выражать реактивную мощность Q, также не подходит для выполнения такой функции, так как не позволяет реактивной мощности принимать отрицательные значения, а это неизбежно случится при изменении реактивного характера сопротивления цепи с активно-индуктивного на ёмкостно-индуктивный.

Только последнее уравнение (13) соответствует всем критериям выражения, которое может определять реактивную мощность Q: оно содержит только реактивные составляющие и может принимать различные знаки в зависимости от характера реактивности сопротивления цепи.

Таким образом, в результате подбора выражения для изображения активной мощности P из возможных вариантов (5) – (8), удовлетворяющим физическому смыслу этой мощности оказывается изображение (8), а для изображения реактивной мощности Q из возможных вариантов (10) – (13) удовлетворяющим физическому смыслу этой мощности оказывается выражение (13). Комплексная мощность $\dot{P}$ цепи гармонического тока при этом будет определяться выражением:

$$\begin{aligned} P + j \cdot Q &= \frac{1}{4} \cdot \left\{ \dot{U}_m \cdot \overset{*}{I}_m + \overset{*}{U}_m \cdot \dot{I}_m \right\} + j \cdot \frac{1}{4 \cdot j} \cdot \left\{ \dot{U}_m \cdot \overset{*}{I}_m - \overset{*}{U}_m \cdot \dot{I}_m \right\} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \dot{U}_m \cdot \overset{*}{I}_m + \frac{1}{4} \cdot \overset{*}{U}_m \cdot \dot{I}_m + \frac{1}{4} \cdot \dot{U}_m \cdot \overset{*}{I}_m - \frac{1}{4} \cdot \overset{*}{U}_m \cdot \dot{I}_m = \frac{1}{2} \cdot \dot{U}_m \cdot \overset{*}{I}_m = \dot{U}_{\text{Д}} \cdot \overset{*}{I}_{\text{Д}} \end{aligned}. \tag{14}$$

Таким образом, выражение (1), определяющее мощность гармонического тока $\dot{P}$ (14) в комплексной форме, получается в результате отдельного подбора её активной P (8) и реактивной Q (13) составляющих из ряда формальных результатов преобразования гармонической функции мощности в комплексную форму, при учете физического смысла получаемых составляющих комплексной мощности.

Представляется, что подробно описанный выше процесс вывода выражений для активной, реактивной и комплексной мощности цепи гармонического тока будет полезен для специалистов и студентов, интересующихся данной проблематикой.