

УДК 539.3

**СВЯЗАННАЯ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ИЗГИБА  
ТОНКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ИЗ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ  
С УСЛОЖНЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ**

**Чигинский Д. С.**

**Научный руководитель — профессор А. А. Трещёв**

*ГОУ ВПО «Тульский государственный университет»*

Используя методику нормированных пространств, предложенную в работе Н. М. Матченко и А. А. Трещёва, получим систему разрешающих уравнений для тонких прямоугольных пластин из изотропных разнсопротивляющихся материалов, находящихся в условиях термомеханического нагружения. Будем считать, что термодинамический потенциал Гиббса упрочняющегося материала для случая нагружения представляет собой сумму механической и температурной составляющих.

Для построения общей теории термоупругих разнсопротивляющихся материалов будем рассматривать малые изменения температуры  $\theta^0/T_0 \ll 1$  (где  $\theta^0 = T - T_0$  — изменение температуры;  $T$  — конечная температура в точке тела;  $T_0$  — начальная температура в точке тела в ненапряжённом состоянии), тогда зависимостью механических и теплофизических характеристик материала от температуры можно пренебречь.

Влияние вида напряжённого состояния на деформационные характеристики материалов учитывается на базе методики нормированных пространств напряжений, поэтому термодинамический потенциал Гиббса используется в форме:

$$-\Gamma = (b_1 + b_3\xi)\sigma^2 + (b_2 + b_4\xi + b_5\eta \cos 3\varphi)\tau^2 + \Gamma_t(\theta^0) + [(b_{t1}\xi + b_{t2})\sigma + b_{t1}\eta\tau]\theta^0, \quad (1)$$

где  $b_n, b_m$  — механические и температурные константы термодинамического потенциала Гиббса;  $\sigma = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$  — средние нормальные напряжения;  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\tau = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}/3$  — средние касательные напряжения;  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$  — компоненты деватора напряжений;  $\xi = \sigma/S_0$  и  $\eta = \tau/S_0$  — функции (нормированные нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке);  $S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ ;  $\cos 3\varphi$  — фазовый инвариант;  $\Gamma_t(\theta^0)$  — температурные слагаемые.

Рассматривается плоское напряженное состояние с параметрами  $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ , тогда дифференцируя термодинамический потенциал Гиббса (1) в форме  $e_{ij} = -\partial\Gamma/\partial\sigma_{ij}$  и  $L = -\partial\Gamma/\partial T$ , получим связь между компонентами тензоров деформаций и напряжений:

$$e_{ij} = \frac{2}{3}b_2\sigma_{ij} + \frac{2}{3}(b_1 - b_2)\sigma\delta_{ij} + \frac{1}{3}b_{t2}\theta^0\delta_{ij} + R_{ij}; \quad (2)$$

$$R_{ij} = \left( \frac{(b_4 - b_3)\xi^3 + b_5\eta^3 \cos 3\varphi +}{+(b_4 + b_5\sqrt{2})\xi + b_{t1}\xi\theta^0/\sigma} \right) \frac{\sigma_{ij}}{3} + \left( \frac{3\xi(b_3 - b_4 - b_5/\sqrt{2}) +}{+(b_4 + b_5\sqrt{2})/\xi} \right) \frac{\sigma\delta_{ij}}{3}; \quad (3)$$

$$L = (b_{i1}\xi + b_{i2})\sigma + b_{i1}\eta\tau + \frac{d\Gamma_t}{dT}, \quad (4)$$

где  $e_{ij}$  — компоненты тензора деформаций;  $R_{ij}$  — нелинейные слагаемые;  $L$  — плотность энтропии;  $i, j = 1, 2, 3$ .

Обращая для выражений деформаций (2) линейные члены уравнений, получим зависимости для любой поверхности пластины:

$$\sigma_{ij} = (D_1 + D_2)e_{ij} - 3D_2e\delta_{ij} - D_3\theta^0\delta_{ij} - H_{ij}, \quad (5)$$

где  $e = e_{ij}\delta_{ij}/3$  — средние деформации;  $H_{ij} = (D_1 + D_2)R_{ij} - 3D_2R_0\delta_{ij}$ ;

$$D_1 = (b_1 - b_2)/(2b_1b_2); D_2 = (2b_1 + b_2)/(2b_1b_2); D_3 = b_{i2}/2b_1;$$

$$R_0 = ((b_4 - b_3)\xi^3 + b_5\eta^3 \cos 3\varphi + \xi(3b_3 - 2b_4) + b_4/\xi)\frac{\sigma}{3} + \frac{b_{i1}\xi\theta^0}{3}.$$

Для этой же поверхности имеют место гипотезы Кирхгофа в форме:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + x_3\chi_{ij}; \quad \varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad \chi_{ij} = -w_{,ij}, \quad (6)$$

где  $\chi_{ij}, \varepsilon_{ij}$  — кривизны и деформаций срединной поверхности;  $u_i, w$  — горизонтальные перемещения и прогибы срединной плоскости.

Далее можно перейти к определениям усилий в срединной поверхности по формулам:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_3; \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3. \quad (7)$$

Уравнения статики с учетом продольных усилий, в случае равномерно распределенной нагрузки, имеют вид:

$$N_{11,1} + N_{12,2} = 0; \quad N_{12,1} + N_{22,2} = 0; \quad (8)$$

$$M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} = -q - N_{11}w_{,11} - 2N_{12}w_{,12} - N_{22}w_{,22},$$

где  $q$  — интенсивность поперечной равномерно распределенной нагрузки.

Для температуры также имеется уравнение притока тепла в форме:

$$\lambda\theta^0_{,ii} - C_\sigma\theta^0_{,i} - (3A_i\sigma_{,i} + B_iS_{,i})T_0 + U = 0, \quad (9)$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $C_\sigma$  — удельная теплоемкость материала;  $A_i = 0.5(\alpha_{i1}^+ + \alpha_{i1}^-)$ ;  $B_i = 0.5(\alpha_{i1}^+ - \alpha_{i1}^-)$ ;  $\alpha_{i1}^+, \alpha_{i1}^-$  — коэффициенты линейного теплового расширения в продольном направлении при растяжении и сжатии, соответственно;  $S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$  — вектор полного напряжения;  $U$  — локальный источник тепла.

Выражение (9) в отличие от классического уравнения теплопроводности остаётся нелинейным, несмотря на проведённую линеаризацию по температуре. Кроме традиционного слагаемого, определяющего взаимосвязь полей деформаций и температуры, в уравнении (9) входит нелинейная компонента, учитывающая влияние вида напряжённого состояния на процесс теплопроводности. Уравнение (9) следует переписать в перемещениях, при отсутствии локальных источников тепла  $U = 0$ , с учётом уравнений (5) и (6).

Подставляя уравнение (7) в (8), учитывая (5) и (6), можно получить замкнутую систему уравнений равновесия пластины прямоугольной формы в перемещениях. Полученные уравнения равновесия и уравнение притока тепла образуют полную систему дифференциальных уравнений описывающих плосконапряжённое состояние прямоугольных пластин в условиях термомеханического нагружения. После выполнения преобразований, разрешающая система дифференциальных уравнений в частных производных приобретает следующий вид:

$$h(u_{1,11}(D_1 - D_2) + u_{2,12}(D_1/2 - D_2) + u_{1,22}D_1/2)(D_1 + D_2)/D_1 = \int_{-h/2}^{h/2} (H_{11,1} + H_{12,2} + H_{33,1}D_2/D_1) dx_3; \quad (10)$$

$$h(u_{2,22}(D_1 - D_2) + u_{1,12}(D_1/2 - D_2) + u_{2,11}D_1/2)(D_1 + D_2)/D_1 = \int_{-h/2}^{h/2} (H_{22,2} + H_{12,1} + H_{33,2}D_2/D_1) dx_3; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} -h^3(w_{,1111} + 2w_{,1122} + w_{,2222})(D_1^2 - D_2^2)/12D_1 = q + \\ + w_{,11} \int_{-h/2}^{h/2} (H_{11} + H_{33}D_2/D_1 + \theta^0(1 + D_2/D_1)D_3) dx_3 + \\ + w_{,12} \int_{-h/2}^{h/2} (H_{12}) dx_3 + \\ + w_{,22} \int_{-h/2}^{h/2} (H_{22} + H_{33}D_2/D_1 + \theta^0(1 + D_2/D_1)D_3\theta^0) dx_3 - \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} -h(u_{1,1}(D_1 - D_2) - u_{2,2}D_2)w_{,11}(1 + D_2/D_1) - \\ -h(u_{2,1} + u_{1,2})w_{,12}(D_1 + D_2)/2 - \\ -h(u_{2,2}(D_1 - D_2) - u_{1,1}D_2)w_{,22}(1 + D_2/D_1); \\ \lambda\theta^0_{,33} - \left( C_\sigma - 2A_i T_0 D_3 \frac{D_1 + D_2}{D_1} \right) \theta^0_{,r} - \\ -A_i T_0 (D_1 - 2D_2) \frac{D_1 + D_2}{D_1} [(u_{1,1r} + u_{2,2r}) - x_3(w_{,11r} + w_{,22r})] = \end{aligned} \quad (13)$$

$$= T_0 \left( -A_i H_{11,r} - A_i H_{22,r} - 2A_i \frac{D_2}{D_1} H_{33,r} + B_i S_{,r} \right),$$

где  $u_1 = u_1(x_1, x_2, t)$ ,  $u_2 = u_2(x_1, x_2, t)$  — перемещения в срединной плоскости вдоль оси  $x_1$  и  $x_2$ , соответственно;  $w = w(x_1, x_2, t)$  — функция вертикального прогиба;  $\theta^0 = \theta^0(x_3, t)$  — функция температуры.

Механические граничные условия имеют вид:

$$w = 0, \quad w_{,i} = 0, \quad u_i = 0. \quad (14)$$

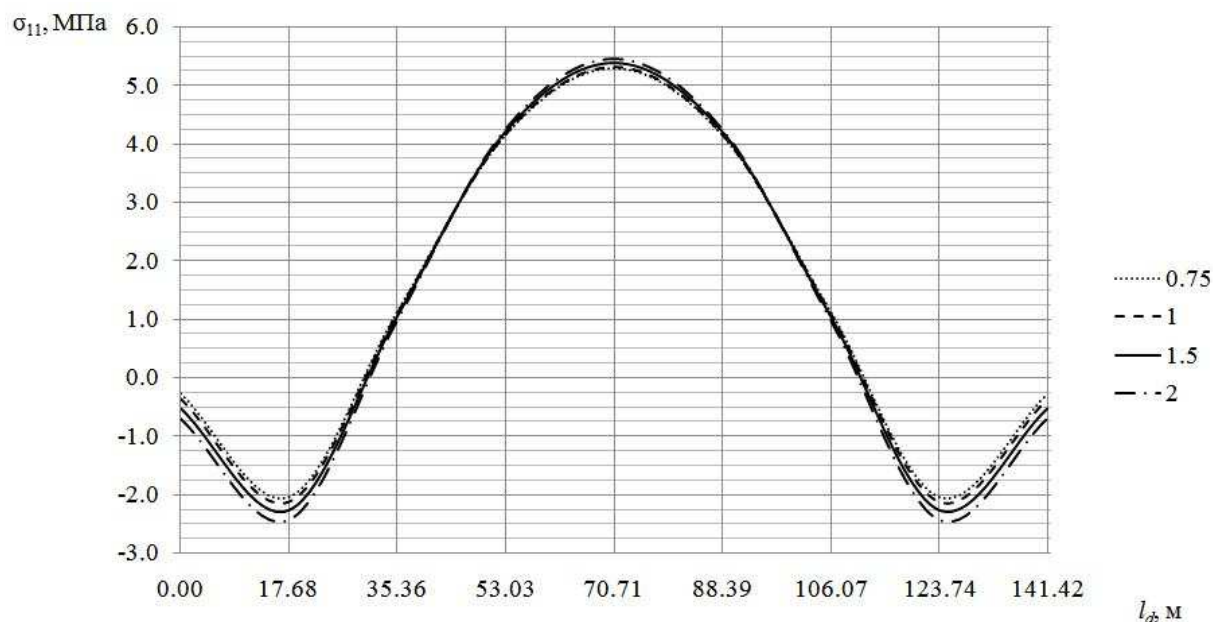
Разрешающие уравнения (10)–(13) с начальными и граничными условиями (14) представлены в форме, когда все нелинейные члены выписаны в правых частях, которая удобна для применения метода «упругих решений», применяемого для решения конкретных задач. Решение системы дифференциальных уравнений осуществляется в пакете прикладных программ MATLAB (MathWorks Inc., США), используя который, на каждой итерации по методу «упругих решений» ищется частное решение системы разрешающих уравнений.

В процессе решения прослеживается процесс влияния температуры на механические характеристики материалов и напряженного состояния на распределение температуры по толщине пластинки, рассчитывается распределение температуры по толщине пластинки, характеристики ее напряженно-деформированного состояния, с учетом температурного воздействия.

Для демонстрации возможностей предлагаемой математической модели решается задача со следующими исходными данными. Квадратная пластина со стороной  $l = 100$  мм, толщиной  $h = 4$  мм, жестко закреплена по контуру; нагружается равномерно распределенной нагрузкой  $q = 5 \dots 80$  кПа, также осуществляется нагрев

поверхности пластины с перепадом температур. Температурные условия: на нижней поверхности пластины  $T_1 = 10\text{ }^\circ\text{C}$ ; на верхней поверхности пластины  $T_n = 50\text{ }^\circ\text{C}$ ; начальная температура  $T_0 = 20\text{ }^\circ\text{C}$ . Механические характеристики: материал графит; модуль упругости при растяжении  $E^+ = 3750\text{ МПа}$  и при сжатии  $E^- = 6130\text{ МПа}$ ; коэффициент Пуассона при растяжении  $\nu^+ = 0.2$  и при сжатии  $\nu^- = 0.35$ ; плотность  $\rho = 1700\text{ кг/м}^3$ ; коэффициент линейного теплового расширения в продольном направлении при растяжении  $\alpha_{11}^+ = 4 \cdot 10^{-6}\text{ К}^{-1}$  и  $\alpha_{11}^+/\alpha_{11}^- = 0.75\dots 2$ ; коэффициент теплопроводности  $\lambda = 150\text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ; удельная теплоемкость материала при постоянном напряжении  $C_\sigma = 500\text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ .

По результатам проведённого анализа сходимости конечно-разностной схемы для разных шагов разбиения по осям координат пластины видно, что по мере уменьшения шага разбиения схема уверенно сходится. Также можно отметить, что оптимальным для конкретных условий задачи, по результатам проверки сходимости, является шаг сетки менее 3 мм. Анализ сходимости метода «упругих решений» показал достаточную точность при 10 шагах по правой части уравнений разрешающей системы.



**Рис. 1. Распределение напряжений  $\sigma_{11}$  при нагрузке  $q = 80\text{ кПа}$  вдоль диагонали на верхней поверхности пластины при различных соотношениях коэффициентов линейного теплового расширения в продольном направлении**

На рис. 1 видно, что влияние явления разносопротивляемости на результаты расчетов, для напряжений, достигает 100 % в зависимости от соотношения коэффициентов линейного теплового расширения в продольном направлении при растяжении  $\alpha_{11}^+$  и сжатии  $\alpha_{11}^-$ .

Полученные результаты указывают на нелинейный характер деформирования конструкций из материалов с усложненными свойствами и подчеркивают важность решения задач термоупругости в связанной постановке с учётом явления разносопротивляемости.