УДК 621.313.39 : 681.5.015 : 004.421.6

СИСТЕМА АВТОМАТИЗАЦИИ ПОЛУЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ИНДУКТОРНОГО ДВИГАТЕЛЯ ДВОЙНОГО ПИТАНИЯ ДЛЯ АРМ ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА

Липунова С.Ю., Игумнова Ю.В., Поваляев В.А.
Научный руководитель — профессор Бронов С.А.

Сибирский федеральный университет

При разработке электромеханических систем применяются математические модели соответствующих электродвигателей различного вида — в зависимости от целей проектирования, с разным составом переменных состояния и входных переменных, при различных допущениях. Как правило, такие модели получают вручную и только для отдельных режимов работы, что затрудняет их последующее использование для других режимов работы.

В то же время, широко распространённые математические программы (Maple, MathCAD, Matlab, Mathematica) позволяют выполнять не только численные расчёты, но также символьные операции компьютерной алгебры. Поэтому их можно использовать не только для расчётов по готовым математическим моделям, но и для получения самих моделей в символьном виде. Математические программы имеют сравнительно небольшое число символьных операций, но их комбинирование позволяет решать многие практические задачи, в том числе, по разработке математических моделей электродвигателей. Математическая теория электрических машин сама по себе является хорошо структурированной методикой получения математических моделей различного вида, что способствует её алгоритмизации и программной реализации. Комплекс программ для символьных операций получения математических моделей должен являться составной частью автоматизированного рабочего места электромеханика. Такая работа ведётся в научно-учебной лаборатории систем автоматизированного проектирования Института космических и информационных технологий СФУ. В настоящее время созданы программы для автоматизированного получения математических моделей нескольких типов двигателей в MathCAD, Matlab и Maple для различных режимов работы, в различных системах координат.

При создании математической модели двигателя в качестве исходного используется матричное представление уравнений электрического равновесия двигателя:

$$\frac{d\,\overline{\psi}(t)}{dt} = -R\cdot\bar{i}(t) + \bar{u}(t),$$

где $\overline{\psi}$ — вектор-столбец потокосцеплений; R — диагональная матрица активных сопротивлений обмоток; $\bar{i}$ — вектор-столбец токов; $\bar{u}$ — вектор-столбец питающих напряжений; t — время:

$$\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_n(t) \end{bmatrix},\ \bar{i}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \dots \\ i_n(t) \end{bmatrix},\ \overline{\psi}(t) = \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \dots \\ \psi_n(t) \end{bmatrix},\ R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_n \end{bmatrix},$$

где n — общее число независимых контуров (суммарное число фаз первой и второй обмоток).

Модель механической нагрузки представляется двумя универсальными дифференциальными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\omega_r(t)}{dt} &= \frac{1}{J}\left[M(t)+M_{st}(t)\right];\\ \frac{d\theta_r(t)}{dt} &= \omega_r(t),\end{aligned}\right\}$$

где M — электромагнитный момент двигателя; M_{st} — статический момент механической нагрузки; J — момент инерции всех вращающихся масс, приведённый к валу двигателя; ω_r — угловая скорость ротора; θ_r — угол поворота ротора; t — время.

Уравнение связи между векторами токов и потокосцеплений:

$$\overline{\psi}\left[\theta_r(t)\right] = L\left[\theta_r(t)\right]\cdot \overline{i}(t),$$

где L — матрица индуктивностей (собственных и взаимных):

$$L\left[\theta_r(t)\right] = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline L_{1,1}\cos(\theta_{1,1}) & L_{1,2}\cos(\theta_{1,2}) & \dots & L_{1,n}\cos(\theta_{1,n})\\ \hline L_{2,1}\cos(\theta_{2,1}) & L_{2,2}\cos(\theta_{2,2}) & \dots & L_{2,n}\cos(\theta_{2,n})\\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots\\ \hline L_{n,1}\cos(\theta_{n,1}) & L_{n,2}\cos(\theta_{n,2}) & \dots & L_{n,n}\cos(\theta_{n,n})\\ \hline\end{array},$$

где $L_{j,k}$ — амплитудные значения индуктивностей; $\theta_{j,k}$ — соответствующие углы между обмотками; основное допущение — отсутствие насыщения магнитной цепи.

Электромагнитный момент определяется как частная производная электромагнитной энергии $W(\theta_r)$ по углу поворота ротора:

$$M = \frac{\partial W(\theta_r)}{\partial\theta_r} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta_r}\left\{\left[\overline{\psi}(\theta_r)\right]^T\cdot\overline{i}(t)\right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\left[\overline{\psi}(\theta_r)\right]^T}{\partial\theta_r}\cdot\overline{i}(t).$$

Матричная модель индукторного двигателя двойного питания с потокосцеплениями в качестве переменных состояния имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\overline{\psi}(t)}{dt} &= -R\cdot\left[L(\theta_r)\right]^{-1}\cdot\overline{\psi}(t)+\overline{u}(t);\\ M &= \frac{1}{2}\cdot\overline{\psi}^T(t)\cdot\left\{\left[L(\theta_r)\right]^{-1}\right\}^T\times\left[\frac{\partial L(\theta_r)}{\partial\theta_r}\right]^T\cdot\left[L(\theta_r)\right]^{-1}\cdot\overline{\psi}(t).\end{aligned}\right\}$$

Матричная модель индукторного двигателя двойного питания с потокосцеплениями в качестве переменных состояния имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\overline{i}(t)}{dt} &= -\left[L(\theta_r)\right]^{-1}\times\left[R\cdot\overline{i}(t)+\omega_r\cdot\frac{\partial L(\theta_r)}{\partial\theta_r}\cdot\overline{i}(t)-\overline{u}(t)\right];\\ M &= \frac{1}{2}\cdot\overline{i}^T(t)\cdot\left[\frac{\partial L(\theta_r)}{\partial\theta_r}\right]^T\cdot\overline{i}(t).\end{aligned}\right\}$$

Все эти преобразования непосредственно программируются в программе MathCAD14, включая операции символьного дифференцирования, транспонирования матриц и векторов.

Например, в MathCAD для трёхфазного индукторного двигателя двойного питания формирование матрицы индуктивностей осуществляется автоматически:

$$L\theta_s := MFun(6,6,Ls,\cos,\theta_{Lg}) \rightarrow \begin{pmatrix} L_1 & -\frac{L_{11}}{2} & -\frac{L_{11}}{2} & L_{12}\cdot\cos(\theta_r) & L_{12}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{3}-\theta_r\right) & L_{12}\cdot\cos\left(\frac{4\cdot\pi}{3}-\theta_r\right) \\ -\frac{L_{11}}{2} & L_1 & -\frac{L_{11}}{2} & L_{12}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{3}-\theta_r\right) & L_{12}\cdot\cos(\theta_r) & L_{12}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{3}-\theta_r\right) \\ -\frac{L_{11}}{2} & -\frac{L_{11}}{2} & L_1 & L_{12}\cdot\cos\left(\frac{4\cdot\pi}{3}-\theta_r\right) & L_{12}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{3}-\theta_r\right) & L_{12}\cdot\cos(\theta_r) \\ L_{12}\cdot\cos(\theta_r) & L_{12}\cdot\cos\left(\theta_r-\frac{2\cdot\pi}{3}\right) & L_{12}\cdot\cos\left(\theta_r-\frac{4\cdot\pi}{3}\right) & L_2 & -\frac{L_{22}}{2} & -\frac{L_{22}}{2} \\ L_{12}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{3}+\theta_r\right) & L_{12}\cdot\cos(\theta_r) & L_{12}\cdot\cos\left(\theta_r-\frac{2\cdot\pi}{3}\right) & -\frac{L_{22}}{2} & L_2 & -\frac{L_{22}}{2} \\ L_{12}\cdot\cos\left(\frac{4\cdot\pi}{3}+\theta_r\right) & L_{12}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{3}+\theta_r\right) & L_{12}\cdot\cos(\theta_r) & -\frac{L_{22}}{2} & -\frac{L_{22}}{2} & L_2 \end{pmatrix}$$

Автоматически осуществляется также дифференцирование этой матрицы (что необходимо для применения в некоторых из приведённых выше формул):

$$DL\theta_s := MDif(L\theta_s,\theta_r) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -L_{12}\cdot\sin(\theta_r) & L_{12}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3}-\theta_r\right) & L_{12}\cdot\sin\left(\frac{4\cdot\pi}{3}-\theta_r\right) \\ 0 & 0 & 0 & L_{12}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3}-\theta_r\right) & -L_{12}\cdot\sin(\theta_r) & L_{12}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3}-\theta_r\right) \\ 0 & 0 & 0 & L_{12}\cdot\sin\left(\frac{4\cdot\pi}{3}-\theta_r\right) & L_{12}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3}-\theta_r\right) & -L_{12}\cdot\sin(\theta_r) \\ -L_{12}\cdot\sin(\theta_r) & -L_{12}\cdot\sin\left(\theta_r-\frac{2\cdot\pi}{3}\right) & -L_{12}\cdot\sin\left(\theta_r-\frac{4\cdot\pi}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -L_{12}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3}+\theta_r\right) & -L_{12}\cdot\sin(\theta_r) & -L_{12}\cdot\sin\left(\theta_r-\frac{2\cdot\pi}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -L_{12}\cdot\sin\left(\frac{4\cdot\pi}{3}+\theta_r\right) & -L_{12}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3}+\theta_r\right) & -L_{12}\cdot\sin(\theta_r) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матричное уравнение электрического равновесия:

$$d\Psi = -Rg\cdot I + (\phi - \phi0) \rightarrow \begin{pmatrix} d\Psi_1 \\ d\Psi_2 \\ d\Psi_3 \\ d\Psi_4 \\ d\Psi_5 \\ d\Psi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 - I_1\cdot R_1 - \phi0_1 \\ \phi_2 - I_2\cdot R_2 - \phi0_2 \\ \phi_3 - I_3\cdot R_3 - \phi0_3 \\ \phi_4 - I_4\cdot R_4 - \phi0_4 \\ \phi_5 - I_5\cdot R_5 - \phi0_5 \\ \phi_6 - I_6\cdot R_6 - \phi0_6 \end{pmatrix}$$

Выражение электромагнитного момента через токи обмоток:

Электромагнитный момент при косинусоидальной аппроксимации, геометрической и электрической симметрии: $M\theta_s := \frac{1}{2} \cdot \left(DL\theta_s \cdot I\right)^T \cdot I$

$$M\theta_s(I, \theta_r) := M\theta_s \left| \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{simplify} \\ \text{collect}, I_4 \\ \text{collect}, I_5 \\ \text{collect}, I_6 \\ \text{collect}, \cos(\theta_r) \\ \text{collect}, \sin(\theta_r) \\ \text{collect}, Ls12_{1,1} \end{array} \right. \rightarrow \left[\sin(\theta_r) \cdot \left[I_4 \cdot \left(\frac{I_2}{2} - I_1 + \frac{I_3}{2}\right) + I_5 \cdot \left(\frac{I_1}{2} - I_2 + \frac{I_3}{2}\right) + I_6 \cdot \left(\frac{I_1}{2} + \frac{I_2}{2} - I_3\right)\right] + \cos(\theta_r) \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{3} \cdot I_1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot I_2}{2}\right) \cdot I_6 - \left(\frac{\sqrt{3} \cdot I_1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot I_3}{2}\right) \cdot I_5 + \left(\frac{\sqrt{3} \cdot I_2}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot I_3}{2}\right) \cdot I_4\right]\right] \cdot L_{12}$$

Также автоматизированно получаются и другие (более громоздкие) выражения математической модели индукторного двигателя двойного питания.