УДК 681.513.5; 517.977

АЛГОРИТМ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОМ СЕЛЕКТИВНОГО УСРЕДНЕНИЯ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Новиков А.А.
Научный руководитель – д-р. техн. наук, профессор Рубан А.И.

Сибирский федеральный университет

Нахождение оптимального решения занимает все более значимую роль при решении инженерных задач – это различные задачи оптимального управления, потребления ресурсов, эффективного использования рабочего времени и аппроксимации поведения объекта с помощью математической модели. Словом, такие задачи возникают везде, где необходимо получить наилучший результат целевой функции в допустимой области, задаваемой конечным множеством ограничений–неравенств. Для решения задач оптимизации в настоящее время все чаще применяют математическое моделирование исследуемого объекта, по причине невозможности постановки большого числа опытов или их высокой цены.

Окружающие нас объекты хорошо описываются лишь с помощью нелинейных моделей, параметры которых могут быть как дискретными, так и непрерывны. С помощью дискретных величин описывается структура модели, а с помощью непрерывных описываются параметры модели. Наибольший интерес, с практической точки зрения, представляет нахождение таких значений параметров моделируемой системы, которые соответствуют глобальному минимуму или максимуму заданной целевой функции.

На сегодняшний день существует множество методов как локальной (метод градиентного спуска, метод Ньютона) так и глобальной (генетические алгоритмы, метод имитации отжига, метод ветвей и границ, интервальные методы, муравьиные алгоритмы) оптимизации. Среди глобальных методов оптимизации все большую популярность приобретаю алгоритмы стохастической оптимизации, имеющие слабую доказательную базу, но зачастую, демонстрирующие прекрасные результаты при решении практических задач. Связанна данная популярность с отсутствием априорной информации, в большинстве инженерных задач, о характере глобального поведения целевой функции, совмещенная с её сильной нелинейностью и зависимостью от множества дискретно–непрерывных переменных. Алгоритмы, основанные не на стохастических подходах зачастую способны решать лишь узкий круг «хороших» задач и сложны в настройке.

В статье рассматривает решение задачи глобальной оптимизации путем применения метода усреднения координат в области дискретно–непрерывных переменных. Данный подход перспективен при работе с исследуемым объектом как с «черным ящиком», хорошо справляется с помехами и имеет невысокие вычислительные затраты. В ходе исследования был синтезирован алгоритм поиска экстремума для задач со смешанными дискретно-непрерывными переменными с помощью функции принадлежности для дискретных переменных.

Полученный алгоритм поиска глобального экстремума привлекает своей простотой, относительно небольшими затратами на вычисления и работоспособностью при наличии аддитивных помех измерения (вычисления) оптимизируемой функции.

Постановка задачи

Рассматривается задача отыскания условного глобального минимум функции многих переменных с учетом ограничений в виде неравенств $\varphi_j(x, y) \le 0$, $j = \overline{1, m_1}$.

$$\begin{cases} I(x,y) = \min\limits_{x,y} \\ \varphi_j(x,y) \le 0, j = \overline{1, m_1} \\ x \in X; y \in Y, Y \subset Z \end{cases}, \qquad (1)$$

где $x = (x_1, \cdots, x_k)$ – вектор непрерывные переменные;

$y = (y_1, \cdots, y_l)$ – вектор дискретных переменных.

Априорная информация о характере глобального поведения целевой функции, отсутствует, целевая функция может быть многоэкстремальной, разрывной, не дифференцируемой и может быть искажена аддитивной помехой. Ограничения в виде неравенств, так же могут быть нелинейными, а их количество счетно. Далее под решением экстремальной задачи в ходе всей статьи будем понимать поиск минимума функции многих переменных.

Описание алгоритма поиска экстремума для задач со смешанными дискретно-непрерывными переменными с помощью функции принадлежности для дискретных переменных.

Данный алгоритм решения задачи глобальной оптимизации использует функцию принадлежности для замены дискретных переменных фиктивными непрерывными переменными с областью значений из интервала [-1; 1]. Дискретные переменные y_i является числовыми, возможные значения упорядочены. Количество значений принимаемых дискретной переменной y_i обозначим μ_i. Функция принадлежности при этом для каждой дискретной переменной представляет собой кусочно-непрерывную функцию и строится следующим образом: интервал значений непрерывной переменой разбивается на μ_i равных интервалов, каждый из которых соответствует одному значению дискретной переменной. График функция перехода для дискретной переменной y_i отображен на Рисунке 1.

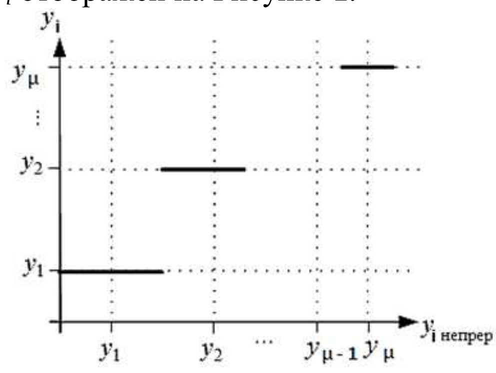


Рисунок 1. Функция принадлежности, однозначно связывающая дискретную числовую переменную и её непрерывный аналог

Для вычисления значения целевой функции в некоторой точке производится переход от фиктивных непрерывных переменных к соответствующим их дискретным переменным. Таким образом, от решения задачи глобальной оптимизации в области дискретно-непрерывных переменных происходит переход в область непрерывных переменных, решение которой производится с применением метода усреднения координат.

Для учета ограничений используются следующие подходы:

– размещение пробных точек только внутри допустимой области самый простой, но самый затратный в вычислительном отношении. Основная идея в последовательной генерации пробных точек, из которых оставляются только те точки, которые удовлетворяют исходным ограничениям неравенствам. Чем меньше объём допустимой области и чем больше число ограничений, тем больше число безрезультатных проб. В этом основной недостаток данного способа учёта ограничений неравенств и соответственно алгоритмов построенных на нем;

– переход к штрафной функции базируется на изменении минимизируемой функции в пробных точках. К минимизируемой функции добавляется штрафная компонента, построенная по ограничениям неравенств, таким образом, что бы при нарушении ограничений неравенств значение минимизируемой функции резко возрастало. Учёт ограничений в пробных точках, непопадающих в допустимую область, приводит к существенному сокращению числа генерируемых пробных точек. Особенно эффективен этот способ учёта ограничений при стремлении к нулю объёма допустимой области;

– прямой учет ограничений, позволяет учесть нарушаемые ограничения за счёт расширения нормированного ядра в алгоритме расчёта рабочего шага и размеров прямоугольной области для пробных движений следующего шага. Появляются (в виде произведения) дополнительные ядра для относительных величин нарушаемых ограничений. Данный способ также эффективен, как и штрафные функции при стремлении к нулю объема допустимой области, но сложнее в настройке вида дополнительных ядер и в подборе коэффициента селективности для каждого из дополнительных ядер.

Численный пример

Рассмотрим следующую задачу: $I(x_1, x_2, y_1, y_2)$, две непрерывные переменные x_1, x_2 и две номинальные дискретные переменные y_1, y_2. Возможные значения переменной y_1 можно представить в виде {1, 1.5}, переменная y_2 принимает следующие значения {1, 1.5, 2}.

Каждой комбинации значений дискретных переменных соответствует однотипная четырёхэкстремальная потенциальная функция, построенная за счёт применения операции суммирования к четырём элементарным экспоненциальным потенциалам, но с различной глубиной и положением экстремумов:

$$I(x) = -5\exp\{-3[|x_1 + y_1|^{y_2} + |x_2 + 1|^{y_2}]\} - 7,5\cdot(1 + y_1)\cdot\exp\{-2.5[|x_1|^{2y_2} + |x_2|^{2y_2}]\}$$
$$-3\exp\{-1[|x_1 - y_1|^{0.9y_2} + |x_2 - y_1|^{1.2}]\} - 10\cdot(3 - y_1\cdot y_2)\cdot\exp\{-2[|x_1 - 2y_1|^{2y_2} + |x_2 - 2y_1|^{1.5y_2}]\} \quad (2)$$

Допустимая область задается в виде области между двумя линиями: $x_1 \pm \Delta \leq x_2$ (3)

	1		1.5		2	
	-5.15	-15.42	-5.13	-15.44	-5.11	-15.50
	-3.47	-20.4	-3.38	-15.40	-10.53	
.5	-5.00	-18.90	-5.00	-18.85	-5,00	-18.85
	-3.00	-15.14	-3.00	-15.11	-3.00	

Таблица 1 Экстремумы функции (2)

Глобальным условным экстремумом является точка: ($x_1 = 2, x_2 = 2, y_1 = 1, y_2 = 1$) (это хорошо видно по формуле 2 и таблице 1).

На рис. 1 представлен пространственный вид функции (2), при $y_1 = 1, y_2 = 1$. Она имеет минимумы в точках (2; 2), (0; 0), (-1; -1), (1; 1) и принимает в них соответственно значения (–20,4), (–15,42), (–5,15), (–3,48). На рис. 2 приведены линии равных уровней функции (2), при и ограничений (3) при $\Delta = 2$.

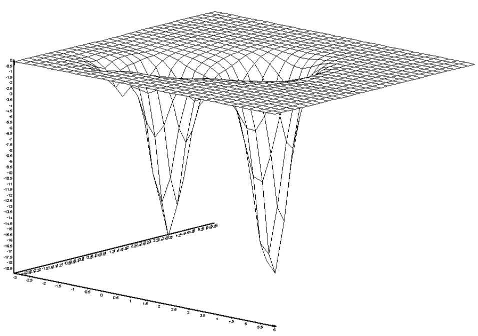


Рис. 1. Потенциальная функция (2) при ($y_1 = 1, y_2 = 1$)

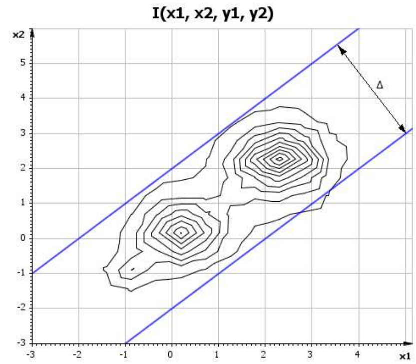
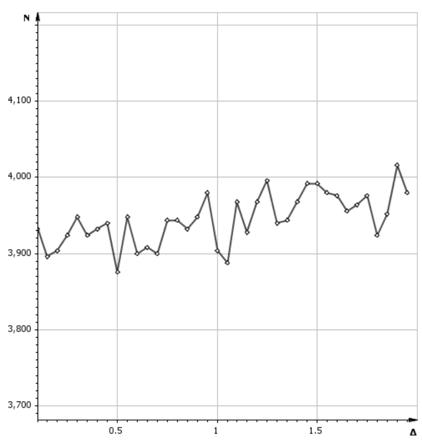


Рис. 2 Линии равных уровней функции (2) при ($y_1 = 1, y_2 = 1$) и ограничениях (3)

Выше описанный алгоритм хорошо справляется с поиском условного глобального экстремума. Проведем исследование поведения алгоритма при разных значениях Δ. Для этого будем перебирать Δот 0.1 до 2,0 с шагом 0.05 и усреднять на каждом шаге по 101 запуску. Исследование будем проводить с использованием алгоритма размещения пробных точек в допустимой области для учета ограничений.

Рис.3 демонстрирует процесс исследования свойств, работы алгоритма – показаны два графика: вероятность отыскания истинного решения и количество точек в которых производится вычисление функции $I(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Размер выборки n = 400. Значения непрерывных переменных на первом шаге итерации x^0 = (0; 0) и Δx^0 = (10; 10). В качестве функции ядра используется параболическое с коэффициентом селективности $s = 50$. $\gamma_q = 1.2$.



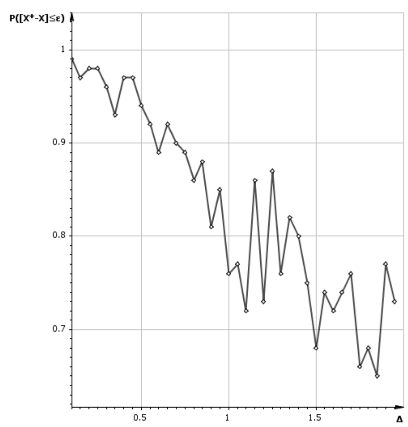


Рис. 3. Поиск минимума функции (2) при ограничениях (3)

Как видно из графиков оценка вероятности отыскания истинного решения уменьшается с увеличением , это связанно с малым количеством пробных точек, особенно на первых этапах, когда алгоритмом локализуется область поиска глобального экстремума. Это происходит в силу того, что структура потенциальной функции очень сильно зависит от значений дискретных переменных. И решение данной оптимизационной задачи на первых шагах алгоритма эквивалентно поиску глобального экстремума при каждой комбинации значений дискретных переменных. Количество сгенерированных точек в среднем равно 3950, причем явной зависимости от ширины допустимой области нет.

Библиографические ссылки

1. Рубан А.И. Глобальная оптимизация методом усреднения координат.: моногр. Красноярск: ИПЦ КГТУ. – 2004. – 302 с.