УДК 735.29.(32)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ "СТАЙНОГО" АЛГОРИТМА ДЛЯ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ.

Ахмедова Ш.А.
Научный руководитель – д.т.н., профессор Семенкин Е.С.

Сибирский федеральный университет

В работе исследовалась эффективность "стайного" алгоритма (particle swarm optimization, PSO) на задачах условной оптимизации. Было проведено сравнение вещественного и бинарного PSO, а так же решена практическая задача.

Первоначально PSO был создан для задач с вещественными переменными. Идею алгоритма PSO впервые сформулировали Дж. Кеннеди и Д. К. Эберхарт в 1995 году, она была почерпнута из социального поведения некоторых животных - стаи птиц, стада копытных или косяка рыб.

PSO начинает работу с создания популяции случайным образом. Строки в PSO называются частицами. Строки-частицы представляют собой вектор координат точки в пространстве оптимизации (вещественных чисел). Каждая частица передвигается по поверхности графика функции с какой-то скоростью. Частицы изменяют свою скорость и координаты, основываясь на собственном опыте и опыте других частиц.

В настоящий момент использование алгоритмов расширилось вплоть до дискретных задач и задач с бинарными переменными. Чтобы расширить версию PSO, работающую с вещественными переменными, в бинарное/дискретное пространство, наиболее важная часть – понять смысл таких понятий, как: траектория, скорость в бинарном/дискретном пространстве. Кеннеди и Эберхарт используют скорость и вероятность для определения является ли x_{id} (частица) в том или ином состоянии (1 или 0). Они стягивали в точку x_{id}, используя логическую функцию $s(v)=1/(1+\exp(-v))$, где скорость высчитывается, используя некоторое уравнение, как

$$v_{id} = v_{id} + c_1 * rand() * (p_{id} - x_{id}) + c_2 * Rand() * (p_{gd} - x_{id})$$

Если случайно сгенерированное число в пределах [0;1] меньше, чем $s(v_{id})$, тогда x_{id} становится 1, иначе становится 0.

Пусть решается следующая задача условной однокритериальной оптимизации:

$$f(x) \to extr$$
$$\begin{cases} g_j(x) \le 0,\ j = \overline{1,r} \\ h_j(x) = 0,\ j = \overline{r+1,m} \end{cases}$$

В общем виде, пригодность индивида x вычисляется по формуле:

$$fitness(x) = f(x) + \delta \cdot \lambda(t) \cdot \sum_{j=1}^{m} f_j^{\beta}(x),$$

где t – номер текущего поколения; $\delta = 1$ если решается задача минимизации; $\delta = -1$ если решается задача максимизации; $f_j(x)$ - штраф за нарушение j-го ограничения; β - вещественное число. Штрафные функции $f_j(x)$ вычисляются по формуле:

$$f_j(x) = \begin{cases} \max\{0, g_j(x)\}, \ j = \overline{1,r} \\ |h_j(x)|, \ j = \overline{r+1,m} \end{cases}$$

Предложены следующие штрафные методы: метод «смертельных» штрафов и метод динамических штрафов. Метод «смертельных» штрафов попросту отбрасывает недопустимые решения, т.е. решения, неудовлетворяющие условиям. Данный метод хорошо работает на простых задачах, когда допустимая область обладает удобными для оптимизации свойствами (большой размер, выпуклая и т.д.). Метод динамических штрафов использует штрафные функции, описанные выше, и определяет функцию $\lambda(t)$ следующим образом: $\lambda(t) = (C \cdot t)^{\alpha}$. Таким образом, на t-й итерации пригодность индивида x вычисляется в данном методе по следующей формуле:

$$fitness(x) = f(x) + \delta \cdot (C \cdot t)^{\alpha} \cdot \sum_{j=1}^{m} f_j^{\beta}(x).$$

Параметры C, α, β подбираются индивидуально для каждой решаемой задачи.

Исследование проводилось на тестовых функциях, описанных ниже.

Задача 1.

$z = (x-2)^2 + (y-3)^2 \to max$ при условии, что выполняется $x^2 + y^2 \le 52$

Задача 2.

$$z = 20 + e - 20\exp\left(-0.2\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2}{N}}\right) - \exp\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\cos(2\pi \cdot x_i)}{N}\right) \to \min, N = 4$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \le 10 \\ 4x_2 - 5x_3 + x_4 \le 1 \\ 10x_1 + 7.5x_3 - 8.4x_4 \le 3.5 \\ -3.1x_1 + 21.7x_2 - 36.4x_4 \le 16.2 \end{cases}$$

Задача 3.

$$u = x^3 + y^2 + z \to \max$$

$$\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \le 25 \end{cases}$$

Задача 4.

$$z = 10x - 5y \to \max$$

$$\begin{cases} y - 15 \le 0, y + 2x^2 - 20 \le 0 \\ -\dfrac{x^2}{2} - y \le 0 \end{cases}$$

Задача 5.

$$z = -10 \cdot x - 5 \cdot y \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq -15, y \leq \dfrac{x^2}{2} \\ y \geq 2 \cdot x^2 - 20 \end{cases}$$

Задача 6.

$$z = 5 \cdot x + 0.5 \cdot y \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} y \leq -2 \cdot x + 5, y \geq x - 1.5 \\ y \leq 2 \cdot x + 1, x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Результаты для PSO с вещественными частицами.

№ зад.	Смертельные штрафы		Динамические штрафы	
	Кол-во частиц	Кол-во поколений	Кол-во частиц	Кол-во поколений
	50	150	200	300
	200	100	100	100
	250	200	250	100
	250	200	200	200
	250	200	250	100
	400	50	150	100

Результаты для ПСО с бинарными частицами.

№ зад.	Смертельные штрафы		Динамические штрафы	
	Кол-во частиц	Кол-во поколений	Кол-во частиц	Кол-во поколений
	20	3200	20	6400
	20	9000	10	3200
	10	3200	10	3200
	30	3200	10	6400
	10	3200	10	3200
	10	2000	5	6400

При этом вероятность нахождения локальных экстремумов была 90-100%.

Таким образом, для задач условной оптимизации эти алгоритмы и со смертельными, и с динамическими штрафами так же результативны. Причем PSO как с вещественными, так и с бинарными переменными позволяет найти локальный экстремум функций, используя метод динамических штрафов, за меньшее количество вычислений (но есть и исключения). Кроме того для бинарного «стайного» алгоритма требуется мало частиц и большое число поколений.

После того, как исследование «стайного» алгоритма на тестовых функциях было завершено, была решена практическая задача с использованием PSO, которая заключалась в формировании оптимального инвестиционного портфеля предприятия (Химзавод – филиал ФГУП «Красмаш»). То есть задача состоит в составлении такого портфеля инвестиционных проектов, который приносит инвестору наибольшую прибыль. При этом должны выполняться ограничения по выделяемым средствам, норме прибыли и общей рискованности портфеля.

Для формализованной записи критерия получения максимальной доходности от инвестиционных проектов, при соблюдении всех ограничений, были введены следующие обозначения:

m – кол-во центров фин. ответственности (ЦФО) на предприятии;
N_i – количество инвестиционных проектов на i-м ЦФО;
$П_{ij}$ – плановый год. объем прибыли, получаемый i-м ЦФО от внедрения j-го нововведения;
R_{ij} – экспертная оценка рискованности соответствующего инновационного проекта;
c_{ij} — плановые год. затраты фин. средств i-го ЦФО на j-е нововведение;
C_i — плановые год. объемы фин. средств, выделяемые ЦФО в план нововведений;
$C = \sum_{i=1}^{m} C_i$ – сумма всех средств, выделяемых всеми ЦФО на реализацию их инвестиционных программ;
M — плановый год. объем фин. средств, выделяемый центральной компанией;
r — допустимая средняя прибыль на 1 руб. затрат;
ρ – ограничение на суммарную рискованность инвестиционного портфеля;
x_{ij} – искомый параметр, показывающий, планируется ли к внедрению на i-м ЦФО j-е нововведение (если x_{ij}=1, то планируется; если x_{ij}=0, то не планируется).

Центры финансовой ответственности – это структурные подразделения предприятия, обладающие хозяйственной самостоятельностью и имеющие разрешение планировать инвестиционные проекты, финансируемые из собственных средств. Материнское предприятие может добавлять свои средства на инвестиционные программы ЦФО.

Тогда однокритериальная постановка задачи будет:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N_i} \Pi_{ij} x_{ij} \to \max, \textit{где } x_{ij} \in \{1, 0\}$$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} x_{ij}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} R_{ij} x_{ij} \le \rho \qquad \frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} c_{ij} x_{ij}} \cdot \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} \Pi_{ij} x_{ij} \le r \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} c_{ij} x_{ij} \le C + M$$

Исходные данные для задачи формирования инвестиционного портфеля предприятия были взяты из практики работы предприятия Химзавод – филиала ФГУП «Красмаш».

Задача решалась с помощью бинарного PSO. Был применен метод динамических штрафов. В итоге, результат вычислений оказался равным:

Бинарная строка	П рибыль	иск	Средняя норма прибыли на капитал
1011111111111111110 110001	1 17,7	,98	0,5

Здесь единицы в бинарном представлении показывают, в проекты с какими номерами следует инвестировать деньги, а нули – в какие не следует инвестировать деньги, исходя из условия получения максимальной прибыли инвестором при выполнении ограничений задачи. Данный результат был достигнут в 94% при 10 частицах и 3200 поколениях, то есть для нахождения наилучшего решения просматривалось 0,095% пространства оптимизации. При этом наихудшее найденное решение была прибыль 105,751, среднее найденное решение – 117,45097, наибольшее отклонение худшего решения от лучшего решения – 10,15208156 %, наибольшее отклонение среднего решения от лучшего решения – 0,21158028 %. Если же просматривалось 0,19% пространства оптимизации, то вероятность получения максимальной прибыли при данных ограничениях была равна 100%.