

ЗАДАЧА О ПОГРУЖЕНИИ КЛИНА В ИДЕАЛЬНУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

Паршевников И.Е.

Научный руководитель – профессор, д. ф.-м. н. Афанасьев К.Е.

Кемеровский государственный университет

Впервые задача о погружении клина была впервые рассмотрена Вагнером в 30-х годах XX века. Задача относится к классу нелинейных задач с нестационарными свободными границами.

Постановка задачи

В расчётной области D (рис. 1), ограниченной свободной поверхностью S_F , клином S_B и границей далёкого поля Σ решается уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, z \in D \quad (1)$$

Граница S_F является свободной поверхностью жидкости. На клине выполняется граничное условие

$$\partial\psi = -\sin(\alpha)ds, z \in S_B \quad (2)$$

где α - угол полураствора клина. В данной работе $\alpha = 45^\circ$.

На свободной границе выполняются кинематическое и динамическое условия

$$\frac{dz}{dt} = u + iv, z \in S_F \quad (3)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 - \frac{y}{Fr^2}, z \in S_F \quad (4)$$

На границе далёкого поля выполняется динамическое условие

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2, z \in \Sigma \quad (5)$$

Краевая задача (1)-(5) для потенциала скоростей записана в безразмерном виде, где в качестве характерных величин выбираются ускорение свободного падения g и глубина начального заглубления клина H .

Клин погружается со скоростью $V = 1$.

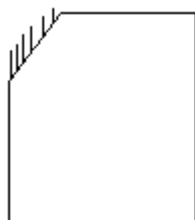


Рис. 1

Алгоритм движения по времени

Краевая задача (1)-(5) является нестационарной. Время явно входит только в граничные условия (3), (4), представляющие собой обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, для интегрирования которых используется метод Эйлера.

Пусть в некоторый момент времени t_k заданы положение свободной границы S_F и распределение потенциала φ^k на ней. Необходимо решить уравнение Лапласа (1) с условием φ^k на S_F и условием (2) на S_B . Новое положение свободной поверхности и распределение потенциала на ней для момента времени $t_k + \tau$ можно вычислить, используя условия (3) и (4), дискретный аналог которых расписывается по схеме Эйлера следующим образом:

$$x^{k+1} = x^k + (\nabla \varphi) \tau, \quad (6)$$

$$\varphi^{k+1} = \varphi^k + \left(\frac{1}{2} \left| (\nabla \varphi)^k \right|^2 - \frac{y^k}{Fr^2} \right) \tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где x^k , φ^k - значения функций на k -ом шаге по времени. В результате на каждом шаге по времени t_k решается смешанная краевая задача для уравнения Лапласа (1) с граничными условиями (6) и (7).

Численное моделирование

На каждом шаге по времени комплексным методом граничных элементов решается граничное интегральное уравнение (записанное по границе $\Gamma = S_F \cup S_B \cup \Sigma$), к которому сводится уравнение Лапласа внутри области D . Применяя интегральную формулу Коши, можно записать

$$w(z_0) = \frac{1}{\varepsilon(z_0)i} \int_C \frac{w(z)}{z-z_0} dz, \quad (8)$$

где $\varepsilon(z_0) = 2\pi$ для внутренней точки, $\varepsilon(z_0) = \pi$ для точки на гладкой границе C , $\varepsilon(z_0) = \beta$ для угловой точки вершины C (β - угол при вершине).

Для численного решения интегрального уравнения граница заданной области разбивается на ряд граничных элементов, в пределах которых функции φ и ψ изменяются линейно по длине элемента. В результате решение граничного интегрального уравнения сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для нахождения неизвестных значений потенциала и функции тока в узлах элементов.

Алгоритм вычисления поля скоростей

Для решения поставленной задачи необходимо вычислять компоненты вектора $\nabla \varphi$. Их будем вычислять по следующим формулам:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s}, \quad (10)$$

где \vec{s} - единичный вектор касательной, \vec{n} - единичный вектор внешней нормали. Обход по границе области осуществляется против часовой стрелки.

Для вычисления узловых значений компонент вектор используется подход, изложенный в [1]. Суть его состоит в том, что строится отображение элемента границы области на пространство номеров узлов.

Тогда в силу того, что

$\varphi = \varphi(x, y, t)$, $\psi = \psi(x, y, t)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\varphi = \varphi(j, t)$, $\psi = \psi(j, t)$, $x = x(j)$, $y = y(j)$.

И следовательно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial j} / \frac{\partial s}{\partial j} \right), \quad \frac{\partial \psi}{\partial s} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial j} / \frac{\partial s}{\partial j} \right), \quad (11)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \left(\frac{\partial x}{\partial j} / \frac{\partial s}{\partial j} \right), \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \left(\frac{\partial y}{\partial j} / \frac{\partial s}{\partial j} \right), \quad (12)$$

где
$$\frac{ds}{dj} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dj} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dj} \right)^2}.$$

Остаётся определить значения $\frac{\partial \varphi}{\partial j}$, $\frac{\partial \psi}{\partial j}$, $\frac{\partial x}{\partial j}$ и $\frac{\partial y}{\partial j}$. Так как j - номер точки на числовой оси, то мы имеем дело с дифференцированием указанных функций на равномерной сетке с шагом 1.

Для нахождения первых производных воспользуемся формулами численного дифференцирования 5-го порядка точности:

$$f'_0 = \frac{1}{12}(-25f_0 + 48f_1 - 36f_2 + 16f_3 - 3f_4), \quad (13a)$$

$$f'_1 = \frac{1}{12}(-3f_0 - 10f_1 + 18f_2 - 6f_3 + f_4), \quad (13б)$$

$$f'_2 = \frac{1}{12}(f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4), \quad (13в)$$

$$f'_3 = \frac{1}{12}(-f_0 + 6f_1 - 18f_2 + 10f_3 + 3f_4), \quad (13г)$$

$$f'_4 = \frac{1}{12}(3f_0 - 16f_1 + 36f_2 - 48f_3 + 25f_4). \quad (13д)$$

Используя формулы (11), (12), можно получить дискретные значения для выражений, описываемых формулами (13).

Сглаживание и переразбиение

Сглаживание и переразбиение на обновлённой свободной поверхности выполняются на каждом шаге по времени.

После каждого шага по времени возникает пилообразная неустойчивость профиля свободной поверхности. Её причиной является то, что интегральное уравнение решается численным методом. Неустойчивости могут быть удалены с помощью сглаживания (Лонгье-Хиггинс [2]). Здесь применяется формулы пятиточечной схемы третьего порядка Маруо и Сонга [3].

$$f_1 = \frac{1}{70}(69y_1 + 4y_2 - 6y_3 + 4y_4 - y_5) \quad (14a)$$

$$f_2 = \frac{1}{35}(2y_1 + 27y_2 + 12y_3 - 8y_4 + 2y_5) \quad (14б)$$

$$f_i = \frac{1}{35}(-3y_{i-2} + 12y_{i-1} + 17y_i + 12y_{i+1} - 3y_{i+2}) \quad (14в)$$

$$f_{N-1} = \frac{1}{35}(2y_{N-4} - 8y_{N-3} + 12y_{N-2} + 27y_{N-1} + 2y_N) \quad (14г)$$

$$f_N = \frac{1}{70}(-y_{N-4} + 4y_{N-3} - 6y_{N-2} + 4y_{N-1} + 69y_N) \quad (14д)$$

где $y_i (i=1, 2, \dots, N)$ исходные значения до сглаживания, $f_i (i=1, 2, \dots, N)$ значения после сглаживания. N -число узлов на свободной поверхности. Первые два уравнения используются для сглаживания первых двух узлов, последние два для последних двух. Третье уравнение используется для всех точек из интервала $i=3, \dots, N-2$. Сглаживание не применяется к точке пересечения жидкости и клина и к точке на границе свободной поверхности и границы далёкого поля, так как положение этих точек не должно изменяться.

После обновления свободной поверхности на каждом шаге по времени, узлы могут встать слишком близко друг другу или слишком далеко друг от друга, что может привести к численной неустойчивости. В таких случаях, свободную поверхность можно переразбить. Для интерполяции новых точек на свободной поверхности используется аппроксимация кубическими сплайнами.

На первом шаге у нас известны позиции всех узлов на свободной поверхности. Полигональная длина дуги от первой точки свободной поверхности будет рассчитываться как q_i . На отрезке i , x_i и y_i координаты могут быть записаны как

$$x_i(q) = a_{xi} + b_{xi}(q - q_i) + c_{xi}(q - q_i)^2 + d_{xi}(q - q_i)^3 (i = 1, 2, \dots, N - 1) \quad (15a)$$

$$y_i(q) = a_{yi} + b_{yi}(q - q_i) + c_{yi}(q - q_i)^2 + d_{yi}(q - q_i)^3 (i = 1, 2, \dots, N - 1) \quad (15b)$$

где N - число точек участвующих в процессе переразбиения. Тогда используя непрерывность первых и вторых производных x_i и y_i , мы можем найти коэффициенты $a_{xi}, b_{xi}, c_{xi}, d_{xi}, a_{yi}, b_{yi}, c_{yi}, d_{yi}$. Более подробно метод нахождения коэффициентов описывается в [4].

На втором этапе длина дуги между i -ой и $i+1$ -ой точкой определяется как m_i , а длина дуги от первой точки до i -ой определяется как h_i . Поскольку аналитические приближённые значения $x_i(q)$ и $y_i(q)$ на каждом участке известны, мы можем вычислить m_i

$$m_i = h_{i+1} - h_i = \int_{q_i}^{q_{i+1}} \sqrt{[x'_i(q)]^2 + [y'_i(q)]^2} dq (i = 1, \dots, N - 1) \quad (16)$$

где

$$x'_i(q) = b_{xi} + 2c_{xi}(q - q_i) + 3d_{xi}(q - q_i)^2, \quad (17a)$$

$$y'_i(q) = b_{yi} + 2c_{yi}(q - q_i) + 3d_{yi}(q - q_i)^2. \quad (17b)$$

Для вычисления интегралов используются квадратуры Лежандра-Гаусса.

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}\bar{x} + \frac{a+b}{2}\right) d\bar{x} \quad (18)$$

где

$$\bar{x} = \frac{x - (a+b)/2}{(b-a)/2}.$$

Тогда интеграл на интервале $[-1, 1]$ вычисляется по квадратурным формулам Гаусса для $n=6$:

$$\int_{-1}^1 \bar{f}(\bar{x}) d\bar{x} = \sum_{j=1}^n C_j \bar{f}(\bar{x}_j) \quad (19)$$

Таким образом заменяя q_i на h_i на первом шаге и формируем новые функции интерполяции от h , то есть $x_i(h)$ и $y_i(h)$. Точно также мы можем сформулировать приближённые функции для потенциала скорости $\varphi_i(h)$.

На последнем шаге мы можем вычислить длину дуги от первого узла до любого нового узла на свободной поверхности. Подставляя длины дуг в приближённые функции на элементе, получим новые координаты узла x_i и y_i и значение потенциала φ_i .

Закон сохранения массы

Контроль за консервативностью численного метода с помощью закона сохранения массы. В настоящей работе для всех расчётов относительная погрешность массы не превышала 0.05%.