УДК 539.374

СИММЕТРИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Бурмак В.И.
Научный руководитель – д.ф.-м.н. профессор Сенашов С.И.

Сибирский федеральный университет

В работе найдена группа непрерывных преобразований, допускаемая уравнениями, и построено новое точное решение, описывающее сжатие пластического слоя жесткими плитами, которые сближаются с постоянным ускорением.

1. Рассмотрим уравнения, описывающие плоское напряженное состояние в случае медленных нестационарных течений. Уравнения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \left(\sqrt{3}\sin\omega\cos 2\varphi - \cos\omega\right)\frac{\partial\omega}{\partial x} + \sqrt{3}\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial y} - 2\sin\omega\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = \sqrt{3}\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial x} - \left(\sqrt{3}\sin\omega\cos 2\varphi + \cos\omega\right)\frac{\partial\omega}{\partial y} + 2\sin\omega\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k\lambda\left(\sqrt{3}\cos\omega + 3\sin\omega\cos 2\varphi\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = k\lambda\left(\sqrt{3}\cos\omega - 3\sin\omega\cos 2\varphi\right), \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 6k\lambda\sin\omega\sin 2\varphi. \tag{5}$$

Здесь λ - некоторая положительная функция; φ - угол между первым главным направлением тензорного напряжения и осью Ox; ω - угол связан со значением среднего давления $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2)$, именно $\cos\omega = \frac{\sqrt{3}\sigma}{2k}$; k - постоянная пластичности; u, v – компоненты вектора скорости, все функции зависят от x, y, t.

Найдем точечные симметрии систем (1)-(5) используя методику Ли [1].

Оператор, допускаемый системой уравнений (1)-(5) ищем в виде

$$X = \xi^1\partial_t + \xi^2\partial_x + \xi^3\partial_y + \eta^1\partial_u + \eta^2\partial_v + \eta^3\partial_\lambda + \eta^4\partial_\varphi + \eta^5\partial_\omega, \tag{6}$$

где $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \eta^4, \eta^5, \eta^6, \eta^7$ - искомые функции $t, x, y, u, v, \lambda, \varphi, \omega$.

Действуем первым продолжением оператора X на систему уравнений (1)-(5) и переходим на многообразие, задаваемое этими уравнениями:

$$\begin{aligned}\zeta_1^1 &= \left(\sqrt{3}\cos\omega\cos 2\varphi\eta^5 - 2\sqrt{3}\sin\omega\sin 2\varphi\eta^4 + \sin\omega\eta^5\right)\omega_x + \left(\sqrt{3}\sin\omega\cos 2\varphi - \cos\omega\right)\zeta_2^5 + \\ &+ \left(\sqrt{3}\cos\omega\sin 2\varphi\eta^5 + 2\sqrt{3}\sin\omega\cos 2\varphi\eta^4\right)\omega_y + \sqrt{3}\sin\omega\sin 2\varphi\zeta_3^5 - 2\cos\omega\eta^4\varphi_y - 2\sin\omega\zeta_3^4,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\zeta_1^4=\left(\sqrt{3}\cos\omega\sin2\varphi\eta^5+2\sqrt{3}\sin\omega\cos2\varphi\eta^4\right)\omega_x+2\sin\omega\zeta_2^4-\left(\sqrt{3}\sin\omega\cos2\varphi+\cos\omega\right)\zeta_3^5+$$
$$+\left(2\sqrt{3}\sin\omega\sin2\varphi\eta^4-\sqrt{3}\cos\omega\cos2\varphi\eta^5+\sin\omega\eta^5\right)\omega_y+\sqrt{3}\sin\omega\sin2\varphi\zeta_2^5+2\cos\omega\eta^5\varphi_x,$$
$$\zeta_2^1=\sqrt{3}k\cos\omega\eta^3+3k\eta^3\sin\omega\cos2\varphi-\sqrt{3}k\lambda\sin\omega\eta^5+3k\lambda\cos\omega\cos2\varphi\eta^5-6k\lambda\sin\omega\sin2\varphi\eta^4,$$
$$\zeta_3^2=\sqrt{3}k\cos\omega\eta^3-3k\eta^3\sin\omega\cos2\varphi-\sqrt{3}k\lambda\sin\omega\eta^5-3k\lambda\cos\omega\cos2\varphi\eta^5+6k\lambda\sin\omega\sin2\varphi\eta^4,$$
$$\zeta_3^1=6k\sin\omega\sin2\varphi\eta^3+6k\lambda\cos\omega\sin2\varphi\eta^5+12k\lambda\sin\omega\cos2\varphi\eta^4-\zeta_2^2.$$

Расщепляя уравнения (8) по переменным $v_x,\lambda_i,\varphi_i,\omega_i, i=t,x,y$ получим определяющие уравнения. Решая эти дифференциальные уравнения, получим

$$\xi^1=(a_1+a_2)t+a_3,\ \ \xi^2=a_2x-a_4y+a_5,\ \ \xi^3=a_4x+a_2y+a_6,$$
$$\eta^1=a_1u-a_4v-a_7y+a_8,\ \ \eta^2=a_4u+a_1v+a_7x+a_9,\ \eta^3=(a_1-a_2)\lambda,\ \ \eta^4=a_4,\ \eta^5=0, \tag{9}$$

где $a_i, i=\overline{1,9}$ - постоянные. Выпишем базис алгебры Ли L_9, порождающей группу непрерывных преобразований, которая допускается системой уравнений (1)-(5):

$$X_1=-y\partial_x+x\partial_y-v\partial_u+u\partial_v+\partial_\varphi,\ X_2=t\partial_t+x\partial_x+y\partial_y-\lambda\partial_\lambda,\ X_3=t\partial_t+u\partial_u+v\partial_v+\lambda\partial_\lambda,$$
$$X_4=-y\partial_u+x\partial_v,\ \ X_5=\partial_y,\ X_6=\partial_x,\ \ X_7=\partial_v,\ \ X_8=\partial_u,\ \ X_9=\partial_t. \tag{10}$$

Каждому оператору (10) соответствует однопараметрическая подгруппа. Найдем их

$$X_1: x'=x\cos a-y\sin a, y'=y\cos a+x\sin a, u'=u\cos a-v\sin a, \varphi'=\varphi+a;$$
$$X_2: t'=te^a, x'=xe^a, y'=ye^a, \lambda'=\lambda e^{-a};\qquad X_3: t'=te^a, u'=ue^a, v'=ve^a, \lambda'=\lambda e^a;$$
$$X_4: u'=u-ya, v'=v+xa;\qquad X_5: y'=y+a;\qquad X_6: x'=x+a;\ \ X_7: \tag{11}$$
$$v'=v+a;\qquad X_8: u'=u+a;\qquad X_9: t'=t+a.$$

Здесь указаны только переменные, которые преобразуются данными преобразованиями.

Таблица коммутаторов алгебры Ли L_9 имеет вид:

Таблица 1

	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**	**X_8**	**X_9**
X_1	0	0	0	0	X_6	$-X_5$	X_8	$-X_7$	0
X_2	0	0	0	X_4	$-X_5$	$-X_6$	0	0	$-X_9$
X_3	0	0	0	$-X_4$	0	0	$-X_7$	$-X_8$	$-X_9$
X_4	0	$-X_4$	X_4	0	X_5	$-X_6$	0	0	0
X_5	$-X_6$	X_5	0	$-X_5$	0	0	0	0	0
X_6	X_5	X_6	0	X_6	0	0	0	0	0
X_7	$-X_8$	0	X_7	0	0	0	0	0	0
X_8	X_7	0	X_8	0	0	0	0	0	0
X_9	0	X_9	X_9	0	0	0	0	0	0

Согласно [1] построим внутренние автоморфизмы:

$$X_1\to A_1: X_2'=X_2,\ X_3'=X_3,\ X_4'=X_4,\ X_5'=X_5\cos a_1+X_6\sin a_1,\ X_9'=X_9,$$
$$X_6'=X_6\cos a_1-X_5\sin a_1,\ X_7'=X_7\cos a_1+X_8\sin a_1,\ X_8'=X_8\cos a_1-X_7\sin a_1; \tag{12}$$

$$X_2 \to A_2: X_1' = X_1,\ X_3' = X_3,\ X_4' = X_4 e^{a_2},\ X_5' = X_5 e^{-a_2},\ X_6' = X_6 e^{-a_2},\ X_7' = X_7,$$
$$X_8' = X_8,\ \ X_9' = X_9 e^{-a_2};$$
$$X_3 \to A_3: X_1' = X_1,\ X_2' = X_2,\ X_4' = X_4 e^{-a_3},\ X_5' = X_5,\ X_6' = X_6,\ X_7' = X_7 e^{-a_3},$$
$$X_8' = X_8 e^{-a_3},\ X_9' = X_9 e^{-a_3};$$
$$X_4 \to A_4: X_1' = X_1,\ X_2' = X_2 - a_4 X_4,\ X_3' = X_3 - a_4 X_4,\ X_5' = X_5 e^{a_4},\ X_6' = X_6 e^{-a_4},$$
$$X_7' = X_7,\ X_8' = X_8,\ X_9' = X_9;$$
$$X_5 \to A_5: X_1' = X_1 - a_5 X_6,\ X_2' = X_2 + a_5 X_5,\ X_3' = X_3,\ X_6' = X_6,\ X_4' = X_4 - a_5 X_5,$$
$$X_7' = X_7,\ X_8' = X_8,\ X_9' = X_9;$$
$$X_6 \to A_6: X_1' = X_1 + a_6 X_5,\ X_2' = X_2 + a_6 X_6,\ X_3' = X_3,\ X_5' = X_5,\ X_4' = X_4 + a_6 X_6,$$
$$X_7' = X_7,\ X_8' = X_8,\ X_9' = X_9;$$
$$X_7 \to A_7: X_1' = X_1 - a_7 X_8,\ X_2' = X_2,\ X_3' = X_3 + a_7 X_7,\ X_5' = X_5,\ X_6' = X_6,\ X_7' = X_7,$$
$$X_8' = X_8,\ X_9' = X_9;$$
$$X_8 \to A_8: X_1' = X_1 + a_8 X_7,\ X_2' = X_2,\ X_3' = X_3 - a_8 X_8,\ X_5' = X_5,\ X_6' = X_6,\ X_7' = X_7,$$
$$X_8' = X_8,\ X_9' = X_9;$$
$$X_9 \to A_9: X_1' = X_1,\ X_2' = X_2 + a_9 X_9,\ X_3' = X_3,\ X_4' = X_4,\ X_5' = X_5,\ X_6' = X_6,\ X_7' = X_7,$$
$$X_8' = X_8;$$

С помощью внутренних автоморфизмов построены все неподобные подалгебры алгебры (10), которые позволяют построить все различные инвариантные решения системы (1)-(5). Приведем пример одного такого решения.

2. Систему уравнений (1)-(5) перепишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \tag{13}$$

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau^2 = 3k^2, \tag{14}$$

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{x}}}{2\sigma_{\mathrm{x}} - \sigma_y} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial \mathrm{y}}}{2\sigma_{\mathrm{y}} - \sigma_x} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{y}} + \dfrac{\partial v}{\partial \mathrm{x}}}{6\tau} = \lambda^{-1}. \tag{15}$$

Здесь σ_x, σ_y, τ - компоненты тензора напряжений, k, u, v, λ – определены выше. Уравнения (13) – суть условия равновесия, (14) – суть условия пластичности, (15) – закон течения.

Уравнения (13)-(15) также допускают оператор

$$X_3 = t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v + \lambda\partial_\lambda.$$

Поэтому инвариантное решение уравнений (13)-(15) ищем в виде:

$$u = tu(x, y), v = tv(x, y), \lambda = t\lambda(x, y).$$

Решения такого вида можно использовать для описания движений с постоянным ускорением. В этой работе мы ограничимся решениями вида

$$u = tu(y), v = tv(y).$$

Система уравнений (13)-(15) имеет решения

$$u = \frac{ck\sin\theta}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}, v = -\frac{ck\cos\theta}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}. \quad (16)$$

Компоненты тензора напряжений в этом случае равны

$$\tau = k\cos\theta, \sigma_y = 2k\sin\theta, \sigma_x = k\sin\theta, \quad (17)$$

где θ неявно определено формулой

$$cy = \frac{1}{4}E\left(\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad (18)$$

где $E\left(\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ - эллиптический интеграл второго рода, c - произвольная постоянная.

Подробности построения данного решения представлены в [2].

3. Дадим одну из возможных интерпретаций построенного решения (16)-(18). Пусть

$$y_1 = E\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), y_2 = E\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \text{ тогда } \tau(y_1) = k\frac{\sqrt{2}}{2}, \sigma_y(y_1) = \sqrt{2}k, \; u(y_1) = ck\frac{\sqrt{5}}{5},$$
$$v(y_2) = -ck\frac{\sqrt{5}}{5}, \; \tau(y_2) = -k\frac{\sqrt{2}}{2}, \sigma_y(y_2) = -\sqrt{2}k, u(y_2) = -ck\frac{\sqrt{5}}{5}, v(y_1) = ck\frac{\sqrt{5}}{5}. \quad (19)$$

Это означает, что верхняя шероховатая жесткая плита, заданная уравнением $y = y_1$, движется вниз и вправо с постоянными ускорениями. На плите задано постоянное нормальное и касательные напряжения. Вторая плита, ее уравнение $y = y_2$, движется вверх и влево с постоянными ускорениями. На этой плите также заданы нормальное и касательное напряжения.

Замечание. Подобные решения можно построить и для описания сжатия трубы, стенки которой движутся с постоянным ускорением.

Библиографические ссылки

1. Киряков П.П., Сенашов С.И., Яхно А.Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.

2. Сенашов С.И., Бурмак В.И. Точное решение уравнений пластичности плоского напряженного состояния // Вестн. Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та: сб. науч. тр. Вып. 4(30). Красноярск, 2010. С. 10-11.