УДК 510.635.3

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ЛОГИКИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ФОРМУЛ ОСОБЫХ КЛАССОВ

Смелянский Д.М.
Научный руководитель – к.ф.-м.н., д. филос.н., проф. Хаханян В.Х.

Московский Педагогический Государственный университет

Алфавит ЯЛП[2] состоит из тех же логических связок и кванторов: □, □, &, □, □, □, скобок (,), запятых, предметных переменных x_k и констант c_k, предикатных констант P_m^n произвольной местности *n*, что и алфавит ЯЛП[1], а также *предикатных переменных* X_m^n произвольной местности *n*. Язык второго порядка не содержащий ниеаких констант, называется, в силу слабой выразительной возможности, *вырожденным*, не содержащий толькопредметных констант – *чистым*. Правила построения формул также аналогичны правилам построения формул ЯЛП[1], но допускают, кроме того, кванторы по предикатным переменным. Формулами ЯЛП[2] являются, например, слова: □$X(X(x)$ □ $X(y))$, □X□Z□y□$x(X(x) \sim Z(x,y))$ и т.п. Определения свободных и связанных вхождений переменных, и собственно свободных и связанных переменных даются аналогично ЯЛП[1]. Можно выделить следующие особые виды формул:

1. Формулы первого порядка, т. е. не содержащие предикатных переменных;
2. Предикативные — не содержащие связанных предикатных переменных;
3. Предикатно-замкнутые — не содержащие свободных предикатных переменных.

Навешивая кванторы на предикативные формулы получаем следующие стандартные классы формул:

- предикативные формулы образуют *класс* □$_0$,
- формулы вида □$X_1\dots X_n$ F, где F – предикативная формула, составляют *класс* □$_1$,

формулы вида □$X_1\dots X_n$ F, где F – предикативная формула, составляют *класс* □$_1$.

Система натурального вывода второго порядка PN[2] получается добавлением к правилам системы PN[1] исчисления предикатов первого порядка аналогичных правил введения и удаления кванторов по предикатным переменным:

$$\frac{A}{\forall UA} \quad (□в^2) \qquad \frac{\forall UA}{\breve{S}_B^{U(x_1,\dots,x_n)}A} \quad (□у^2)$$

$$\frac{\breve{S}_B^{U(x_1,\dots,x_n)}A}{\exists UA} \quad (□в^2) \qquad \frac{\exists UA(U) \qquad \begin{matrix}[A(U)]\\ B\end{matrix}}{B} \quad (□у^2)$$

Любая формула ЯЛП[2] также может быть приведена к предваренной нормальной форме.

Пусть M – произвольное множество, $\boldsymbol{Pr_1}$ – некоторое множество 1-местных предикатов, определенных на M, $\boldsymbol{Pr_2}$ – некоторое множество 2-местных предикатов, определенных на M и т.д. Конечную или счетную совокупность множеств M, $\boldsymbol{Pr_1}$, $\boldsymbol{Pr_2}$, … называют *системой областей над М* (*с носителем М*). Если для данного фрагмента ЯЛП[2] указана некоторая система областей M, $\boldsymbol{Pr_1}$, $\boldsymbol{Pr_2}$, … и каждой предметной константе c из сигнатуры этого фрагмента поставлен в соответствие некоторый элемент $\tilde{c}$ из M, а каждому *n*-местной предикатной константе – *n*-местный предикат из множества $\boldsymbol{Pr_n}$, то говорят, что задана *интерпретация* данного фрагмента ЯЛП-2:

$\mathbf{M} = \{M, \boldsymbol{Pr_1}, \boldsymbol{Pr_2}, \dots, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots\}$

Если при этом множества Pr_1, Pr_2, … содержат все предикаты, определенные на *M*, то интерпретация называют *главной*.

Оценка v в системе областей M, $\boldsymbol{Pr_1}$, $\boldsymbol{Pr_2}$, … может быть определена как последовательность $(v_0, v^1, v^2\ldots)$, где v_0 - отображение множества предметных переменных во множество *M*, а v^n - отображение множества *n*-местных предикатных переменных во множество $\boldsymbol{Pr_n}$.

С каждой формулой ЯЛП^2 при ее прочтении можно связать множество предикатов или высказываний, *выражаемых данной формулой*. Предикат, выражаемый формулой *F*, если ее свободным предикатным переменным придаются значения, будем обозначать следующим образом: $\tilde{F}(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2,\ldots, \tilde{R}_n, x_1, x_2,\ldots, x_k)$. Про замкнутую по предикатным переменным формулу будем говорить, что она *однозначно выражает* предикат, который обозначим так: $\tilde{F}(x_1, x_2,\ldots, x_k)$. И служит, таким образом, в качестве явного определения этого предиката. Примером может служить следующее определение равенства: $x{=}y$ □□$U(U(x)$ □ $U(y))$.

Обычным образом определяются истинностное значение формул и отношение семантического следования. Однако, в отличие от случая первого порядка, отношение PN^2-выводимости не согласовано с определенным таким способом отношением семантического следования, т.е. существуют такие интерпретации, что формула, выводимая из истинных в этих интерпретациях формул, сама не будет истинна. Но можно выделить класс семантически корректных интерпретаций (т.е. таких, для которых такая согласованность имеет место), которые называются *правильными*. Правильна всякая главная интерпретация; отличная от главной правильная интерпретация называется *вторичной*. Относительно класса вторичных интерпретаций, как показал Хенкин, имеет место семантическая полнота. Критерием правильной интерпретации является то, что соответствующая система областей *нормальна*, т.е. замкнута в некотором смысле относительно образования формул, точнее: для всякой формулы $F(X_1, X_2,\ldots, X_n, x_1, x_2,\ldots, x_k)$ ЯЛП^2 со свободными переменными $X_1, X_2,\ldots, X_n$, $x_1, x_2,\ldots x_k$ вместе с любыми предикатами $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2,\ldots, \tilde{R}_n$ и элементами $a_1,\ldots, a_m$□M (m□k) система областей содержит предикат $\tilde{F}(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2,\ldots, \tilde{R}_n, a_1,\ldots, a_m, x_{m+1},\ldots, x_k)$.

В качестве подсистемы любая интерпретация невырожденного языка второго порядка включает *элементарную* интерпретацию, система областей которой состоит из предикатов, выразимых формулами первого порядка этого языка. Расширяя эту систему областей до нормальной получаем *квазиэлементарную* интерпретацию, каждый предикат которой будет сечением некоторого однозначно выразимого предиата.

В общем случае вычисление истинностного значения формул второго порядка требует анализа состава системы областей в целом, что может сильно затруднить данную задачу, приводя к так называемому порочному кругу: чтобы знать значение данной формулы мы уже должны знать все предикаты, которые она выражает. Достаточно очевидно, что истинность предикативной формулы не зависит от системы областей в целом, а только от оценки своих переменных. Отсюда следует утверждение:

Лемма. Пусть *F* - □$_1$-формула, и пусть M $=\{M, \boldsymbol{Pr_1}, \boldsymbol{Pr_2}, \ldots, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2,\ldots, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2,\ldots\}$ - интерпретация ЯЛП^2 такая, что *F* истинна в M. Тогда если N $=\{N, Pr_1, Pr_2, \ldots, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2,\ldots, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2,\ldots\}$ – интерпретация с теми же выделенными элементами и предикатами на подсистеме системы областей *M*, $\boldsymbol{Pr_1}$, $\boldsymbol{Pr_2}$, то *F* истинна в N.

Действительно, если формула *F* вида □$X_1\ldots X_n\, G$, где *G* – предикативная формула, истинна, то истинна *G*, которая тем более истинна на меньшем множестве, что влечет на последнем истинность *F*.

Следствие. □$_1$-формула сохраняет свою истинность вплоть до сужения оценок на элементарную интерпретацию.

Хорошо известно, что исчисление первого порядка PN^1 консетвативно в системе PN^2, т.е. всякая PN^2-выводимая формула первого порядка PN^1-выводима. Пусть $F(X_1, X_2,\ldots, X_n, x_1, x_2 ,\ldots,x_k)$ выводимая предикативная формула. Расширяя ее язык заменой ее предикатных новыми константами, получим выводимую формулу первого порядка F□$(P_1, P_2,\ldots, P_n, x_1, x_2,\ldots,x_k)$. Возьмем PN^1-вывод последней, и заменим в нем константы P_1, $P_2,\ldots$, P_n, обратно на переменные X_1, $X_2,\ldots$, X_n, получим PN^1-вывод F. Таким образом всякая предикативная формула может быть выведена без применения правил второго порядка.

Множество предикативных формул семантически полно относительно элементарных интерпретаций:

Теорема. Если предикативная формула F истинна в любой элементарной интерпретации (*элементарно общезначима*), то она выводима.

Пусть □^{El}F, но при этом □□F, тогда по существует вторичная модель M, такая что M□$\neg F$. Но в этом случае $\neg F$ будет истинна в элементарной интерпретации M^{el}, что противоречит условию □^{El}F.

Т. к. всякий предикат элементарной системы областей есть $\tilde{G}(a_1,\ldots, a_m, x_{m+1},\ldots, x_k)$, то для элементарной истинности предикативной формулы $F(X)$ достаточно истинности схемы формул первого порядка $F(G)$. Поскольку из выводимости схемы $F(G)$ следует ее общезначимость, из нее следует элементарная общезначимость $F(X)$, а значит и ее выводимость.

Всякая □$_1$-формула □$XF(X)$ общезначима если и только если общезначима предикативная формула $F(X)$. Поэтому из выводимости схемы F(G), где G - произвольная формула первого порядка в данном языке, следует выводимость □$_1$-формулы □XF(X).

Рассмотрим выводимую Σ_1-формулу □$XF(X)$. Покажем, что в это м случае найдется формула первого порядка G, такая что выводима $F(G)$.

Пусть □□$XF(X)$, но для любой формулы первого порядка G □□ $F(G)$. В этом случае множество формул $\{\neg F(G)\}$ непротиворечиво. Тогда непротиворечива теория T, множеством аксиом которой служит $\{\neg F(G)\}$. Т. к. □□$XF(X)$, то и T□□$XF(X)$. По доказанному выше имеем T □□$X\neg F(X)$, что противоречит T □□$XF(X)$.

Итак, доказана:

Теорема. Пусть $F(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ - предикативная формула невырожденного языка второго порядка.

(1) $F(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ выводима, если выводима схема формул $F(G_1, G_2,\ldots, G_n)$, где G_1, $G_2,\ldots, G_n$ — формулы первого порядка.

(2) Если выводима схема формул $F(G_1, G_2,\ldots, G_n)$, то выводима формула □$X_1\ldots X_nF(X_1, X_2,\ldots, X_n)$.

(3) Если выводима формула □$X_1\ldots X_nF(X_1, X_2,\ldots, X_n)$, то выводима формула $F(G_1, G_2,\ldots, G_n)$ для некоторых формулы первого порядка $G_1, G_2,\ldots, G_n$.

Обратим внимание, что большинство формул, являющихся определениями, а также аксиом классических теорий имеет вид □$_1$- или Σ_1-формул.

Рассматривая теории с аксиоматикой, состоящей из формул вышеуказанного вида, получим следующие следствия из наших результатов.

Первое следствие. Теория с аксиоматикой первого порядка, равнообъемна теории, в которой каждая бесконечная схема аксиом $F(G_1, G_2,\ldots, G_n)$ заменена аксиомой □$X_1\ldots X_nF(X_1, X_2,\ldots, X_n)$.

Отсюда следует, что такие хорошо изученные теории как формальная арифметика PA, теория действительных чисел и теория множеств ZF в своей формулировке первого порядка равнообъемны своим формулировкам второго порядка.

Заметим, что все $\square_1$- и Σ_1-аксиомы можно заменить равносильными им предикативными, убирая кванторы второго порядка, и заменяя связанные кванторами всеобщности предикатные переменные новыми константами. Такая теория имеет квазиэлементарные модели, и семантически полна на них. Отсюда получается:

Второе следствие. Пусть T — теория с предикативной или $\square_1$-аксиоматикой. Тогда

(1) Если выводима схема формул $F(G_1, G_2,\ldots, G_n)$, то выводима формула $\square X_1\ldots X_n F(X_1, X_2,\ldots, X_n)$, где $G_1, G_2,\ldots, G_n$ — предикатно замкнута.

(2) Если выводима формула $\square X_1\ldots X_n F(X_1, X_2,\ldots, X_n)$, то выводима формула $F(G_1, G_2,\ldots, G_n)$ для некоторых предикатно-замкнутых формул $G_1, G_2,\ldots, G_n$.

Другми словами, все предикаты, для которых в данной теории можно доказать какие-то свойства или установить их существование, должны иметь явные определения.

Последнее следствие, однако не является эффективным, т. к. связывает доказуемость более простых формул со сколь угодно сложными (в смысле кванторной сложности). Также оно не алгоритмических средств для нахождения конкретного вида указанных формул.