УДК 735.29.(32)

КОВАРИАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ПАРАДОКСА БЛАЙТА

Попкова М.И.
Научный руководитель – доцент Голденок Е.Е.

Сибирский федеральный университет

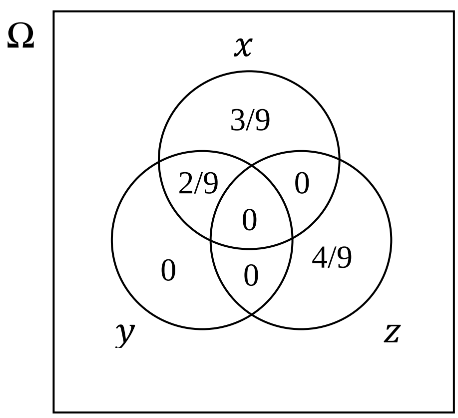
Парадокс Блайта – статистический парадокс, в котором предпочтения нескольких групп меняются на противоположные, после того как группы объединяются.

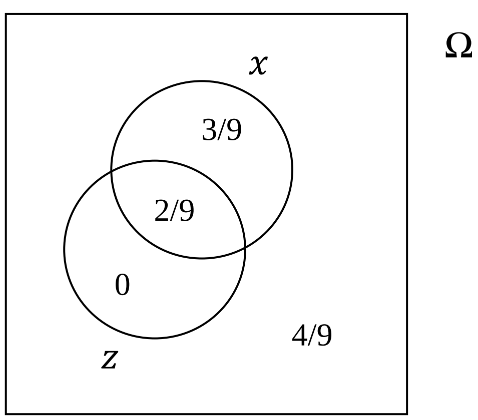
Этот парадокс рассматривается на примере трех пирогов. Пусть владелец ресторана, меню которого в разные дни содержит то или иное подмножество множества из трех пирогов «яблочный, вишневый, черничный», заметил, что, когда в меню только два пирога, один его постоянный посетитель предпочитает яблочный пирог вишневому, и никогда не выбирает черничный. Однако когда в меню присутствуют все три пирога, посетитель вдруг отдает предпочтение вишневому перед яблочным. Парадокс заключается в том, что присутствие или отсутствие в меню третьего пирога, который никогда не предпочитался посетителем, меняет его предпочтение между двумя другими на противоположное. То есть из двух пирогов, яблочного и вишневого, посетитель предпочитает яблочный, а из всех трех пирогов – вишневый.

Итак, введем некоторые обозначения. Пусть $\mathfrak{X} = \{x, y, z\} = \{\text{"выбор яблочного"}, \text{"выбор вишневого"}, \text{"выбор черничного"}\}$ – множество возможных событий-решений. Эвентологическое объяснение парадокса Блайта предполагает следующее Э-распределение множества возможных событий-решений $\mathfrak{X}$:

$$p(\mathfrak{X}) = \{p(\emptyset), p(\{x\}), p(\{y\}), p(\{z\}), p(\{x,y\}), p(\{x,z\}), p(\{y,z\}), p(\{x,y,z\})\}$$
$$= \{0, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, 0, 0, \frac{3}{9}, 0, 0\}$$

Здесь вероятности расположены в соответствии с событиями-решениями выбора из меню соответствующих комбинаций пирогов: «Ничего, Яблочный, Вишневый, Черничный, Яблочный-Вишневый, Яблочный-Черничный, Вишневый-Черничный, Яблочный-Вишневый-Черничный».





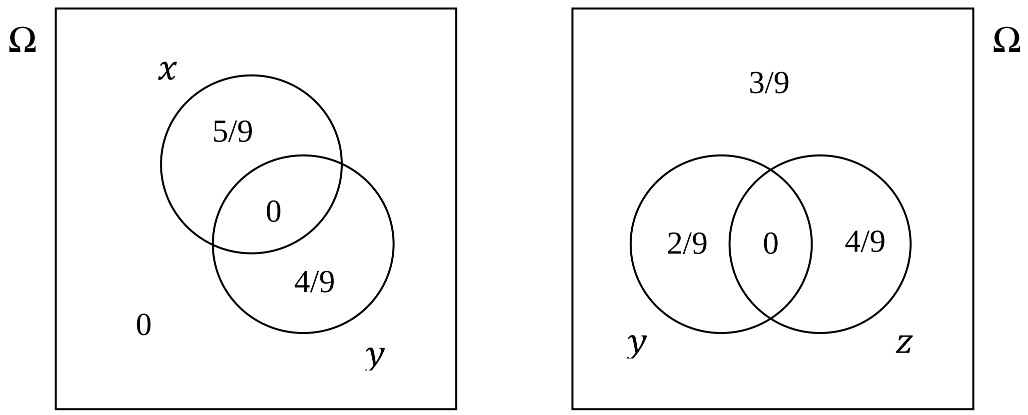


Рис.1 Диаграммы Венна событий-решений, иллюстрирующие парадокс Блайта «о трех пирогах».

События-решения «выбор пирога» - яблочного (x), вишневого (y) и черничного (z) – образуют триплет $\mathfrak{X} = \{x, y, z\}$ с Э-распределением «Ничего, Яблочный, Вишневый, Черничный, Яблочный-Вишневый, Яблочный-Черничный, Вишневый-Черничный, Яблочный-Вишневый-Черничный» $\sim \{0, 2/9, 4/9, 0, 0, 3/9, 0, 0\}$.

События выбора пирога вероятностно зависят друг от друга. Традиционной мерой зависимости событий является ковариация событий. На примере нашего триплета событий посчитаем различные виды ковариаций.

Первый тип – арные ковариации. Арной ковариацией называется величина

$$Kov_{\mathfrak{X}} = \begin{cases} \mathrm{P}\left(\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} x\right) - \prod_{x \in \mathfrak{X}} \mathrm{P}(x), & \mathfrak{X} \neq \emptyset \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Посчитаем ковариации для каждого из 4х случаев, изображенных на рис.1.

$$Kov_{xyz} = p_{xyz} - p_x p_y p_z = 0 - \frac{5}{9} * \frac{2}{9} * \frac{4}{9} = -\frac{40}{729} = -0.0549$$

$$Kov_{xy} = p_{xy} - p_x p_y = 0 - \frac{5}{9} * \frac{4}{9} = -\frac{20}{81} = -0.2469$$

$$Kov_{xz} = p_{xz} - p_x p_z = \frac{2}{9} - 0 * \frac{3}{9} = \frac{2}{9} = 0.2222$$

$$Kov_{yz} = p_{yz} - p_y p_z = 0 - \frac{2}{9} * \frac{4}{9} = -\frac{8}{81} = 0.0988$$

Из полученных числовых результатов можно сделать вывод, что события «выбор яблочного пирога» и «выбор черничного пирога» вероятностно притягиваются друг к другу. То же можно сказать и о событиях «выбор вишневого пирога» и «выбор черничного пирога». в двух других рассмотренных случаях события вероятностно отталкиваются.

Второй тип – плетные ковариации. Плетной ковариацией называется величина

$$Cov_{\mathfrak{X}} = \begin{cases} \mathrm{E}\left(\prod_{x\in\mathfrak{X}}(1_x - p_x)\right), & \mathfrak{X} \neq \emptyset \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Можно провести аналогичные вычисления для триплета $\mathfrak{X} = \{x, y, z\}$.

Ковариация позволяет измерить вероятностную зависимость между событиями. Ведь реальные события зависят друг от друга – либо вероятностно притягиваются, либо вероятностно отталкиваются, что было показано на примере парадокса Блайта. Более того, некоторые события зависят от нескольких событий сразу, и можно представить даже зависимости между множествами событий.