УДК 519.2

ЭНТРОПИЯ ДВУДОЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Козлова Л.В.
Научный руководитель - доцент, д. ф-м. н. Баранова И.В.

Сибирский федеральный университет
Институт математики

Энтропия, возникнув в недрах термодинамики, получила распространение в различных областях знаний. Появилась статистическая, информационная, математическая, лингвистическая, энтропия в теории вероятностей, эвентологическая энтропияи и другие энтропии. Понятие энтропии имеет множество трактовок. В термодинамике - это мера необратимого рассеяния энергии, а в теории информации энтропия понимается как мера неопределенности некоторой ситуации. Эвентологическая энтропия рассматривается как мера неопределенности Э-распределения множества событий.

Впервые понятие энтропии было ведено Р.Ю.Клаузиусом в 1865г. Введение этого понятия связано с поиском координаты теплообмена, т.е. физической величины, неизбежно изменяющейся в процессе теплообмена и остающейся неизменной в его отсутствие. Клаузиус нашел эту координату для частного случая равновестного (обратимого) теплообмена путем разбиения произвольного цикла тепловой машины серией адибат и изотерм на ряд элементарных обратимых циклов Карно.

На основе второго начала термодинамики, которое можно математически представить в виде неравенства Краузиуса: $\oint \frac{\partial Q}{T} \geq 0$, было введено понятие энтропии.

Формула для термодинамической энтропии имеет вид: $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$.

Поиски физического смысла энтропии и попытки найти альтернативу неизбежному, казалось бы, выводу о «тепловой смерти Вселенной»привели к статическому толкованию второго начала термодинамики. Л.Больцман, полагая, что возрастание энтропии в необратимых процессах отражает стремление природы к более вероятному состоянию, пришел к выводу, что зависимость между энтропией S и термодинамической вероятностью Ω имеет вид: $S = k \ln|W|$, где k-константа, названная впоследствии его именем.

В 1948 году, исследуя проблему рациональной передачи информации через зашумленный коммуникационный канал, Клод Шеннон предложил революционный вероятностный подход к пониманию коммуникаций и создал первую, истинно математическую, теорию энтропии. Его сенсационные идеи быстро послужили основой разработки двух основных направлений: теории информации, которая использует понятие вероятности и эргодическую теорию для изучения статистических характеристик данных и коммуникационных систем, и теории кодирования, в которой используются главным образом алгебраические и геометрические инструменты для разработки эффективных кодов.

Информационная энтропия для независимых случайных событий x с n возможными состояниями (от 1 до n) расчитывается по формуле:

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} \log p(i).$$

Итак, информационная энтропия - мера хаотичности информации или мера внутренней неупорядоченности информационной системы. Энтропия увеличивается при хаотичном распределении информации и уменьшается при упорядоченности.

Рассмотрим эвентологический подход. Пусть (Ω, F, P) - эвентологическое пространство, а $\mathfrak{X} \subseteq F$ - конечное множество событий, выбранных из алгебры событий F этого пространства. Каждое N-множество характеризуется набором из 2^N вероятностей. Данный набор называется эвентологическим распределением множества событий $\mathfrak{X}$ мощности N, т.е. N=| $\mathfrak{X}$|.

Энтропией множества случайных событий (энтропией эвентологического распределения множества событий $\mathfrak{X}$) называется величина

$$S(\mathfrak{X}) = -\sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} p(X) \ln p(X),$$

где $p(X) = P(ter(X))$, $X \subseteq \mathfrak{X}$, - вероятности событий-террасок $ter(X) = \bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c$, $X \subseteq \mathfrak{X}$.

Аналогично энтропии в теории вероятности была выведена формула для двудольных множеств.

Множество случайных элементов $\{\xi, K\}$, представимое в виде объединения двух этих долей, будем называть двудольным множеством случайных элементов. Двудольное множество случайных элементов представимо в следующем виде:

$$\{\xi, K\} = \xi \cup K = \{\xi_a, a \in A, K_\beta, \beta \in B\}.$$

Первая доля - это случайные величины ξ, вторая - случайные множества событий K. Пусть A - множество индексов случайных величин, B - множество индексов случайных множеств. Тогда множество случайных величин $\xi_a, a \in A$, а множество случайных величин $K_\beta, \beta \in B$.

Э-распределение вероятностей пересечений событий двудольного множества $\{\xi, K\}$:

$$p(r, X) = P(\bigcap_{x \in X} ter(\{1_x, r_x\}) \bigcap_{\beta \in B} ter(X_\beta)) = P\left(\bigcap_{x \in \{x: r_x = 1\}} x \bigcap_{x \in \{x: r_x = 0\}} x^c \bigcap_{x_\beta \in X} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X^c} x_\beta^c, x \in X', x_\beta \in X, \beta \in B \right).$$

Введем меру энтропии двудольного множества случайных событий:

$$H = -\sum_{(r, X) \subseteq (\Re, X)} p(r, X) \ln p(r, X),$$

где $p(r, X)$ - вероятности пересечений событий двудольного множества.

Энтропия здесь понимается как мера хаотичности системы, неопределенность появления какого-либо события. Так в эвентологической системе двудольных множеств разные события происходят с различной вероятностью, поэтому и неопределенность их появления разная. Таким образом, энтропию можно интерпретировать как меру неопределенности двудольного множества случайных событий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев О.Ю. Эвентология. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2007. – 435с.
2. Хинчин А.Я. Понятие энтропии в теории вероятностей. Успехи математических наук. т.VIII, вып. 3(55), 1953г.

3. Воробьев О.Ю., Лукьянова Н.А. Энтропийные свойства мультипликативно-усеченных аппроксимаций эвентологических распредлений. Математикаи физика. Сибирский федеральный университет, 2009, 2(3), 319-3276.
4. Хинчин А.Я. Понятие энтропии в теории вероятностей. Успехи математических наук. т.VIII, вып. 3(55), 1953г.
5. Баранова И.В. Метод двудольных множеств событий в эвентологическом анализе сложных систем: Автореф. дис. канд. физ. - мат. наук / И.В.Баранова. - Красноярск: КрасГУ, 2006. - 20с.
6. Волькенштейн М.В. Энтропия и информация. - М.: Наука, 1986. - 192с.