УДК 519.6

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИИ MPI НА ПРИМЕРЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА МЕТОДОМ ЯКОБИ

**Набирухина Л.Л.**
**Научный руководитель – к.ф.-м.н., доцент Карепова Е.Д.**

***Сибирский федеральный университет***

Рассмотрим проблему численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона, определяемую как задачу нахождения функции u = u(x,y), удовлетворяющей в области определения *D* уравнению:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), & (x,y) \epsilon D \\ u(x,y) = g(x,y), & (x,y) \epsilon D^0 \end{cases}$$

и принимающей значения g(x,y) на границе $D^0$ области D (f и g являются функциями, задаваемыми при постановке задачи). Подобная модель может быть использована для описания установившегося течения жидкости, стационарных тепловых полей, процессов теплопередачи с внутренними источниками тепла и деформации упругих пластин и др. Данный пример часто используется в качестве учебно-практической задачи при изложении возможных способов организации эффективных параллельных вычислений.

Для простоты изложения материала в качестве области задания D функции u(x,y) далее будет использоваться квадрат:

$D=\{(x,y) \epsilon D:\ 0<x,y<\pi\}$.

Одним из наиболее распространенных подходов численного решения дифференциальных уравнений является метод конечных разностей. Следуя этому подходу, введем на области $D \cup D^0$ равномерную прямоугольную сетку с шагом h:

$$\begin{cases} D_h = \{(x_i, y_j): x_i = ih, y_j = jh, 0 \le i,j \le N+1, \\ \qquad h = \pi/(N+1)\,,\} \end{cases}$$

где величина *N* задает количество узлов по каждой из координат области *D* .

Обозначим оцениваемую при подобном дискретном представлении аппроксимацию функции u(x,y) в точках $(x_i, y_j)$ через $u_{ij}$ . Тогда, используя пятиточечный шаблон для вычисления значений производных, мы можем представить уравнение Пуассона в конечно-разностной форме:

$$\frac{u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1}-4u_{ij}}{h^2} = f_{ij}.$$

Данное уравнение может быть разрешено относительно $u_{ij}$ :

$$u_{ij} = 0.25(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - h^2 f_{ij})$$

Разностное уравнение, записанное в подобной форме, позволяет определять значение $u_{ij}$ по известным значениям функции u(x,y) в соседних узлах используемого шаблона. Данный результат служит основой для построения различных итерационных схем решения задачи Дирихле, в которых в начале вычислений формируется некоторое приближение для значений $u_{ij}$, а затем эти значения последовательно уточняются в соответствии с приведенным соотношением. Выполнение итераций обычно продолжается до тех пор, пока получаемые в результате итераций изменения значений *x*,*y* в некоторой норме не станут меньше заданной величины (требуемой точности вычислений). Отметим, что последовательность решений, получаемых методом сеток, равномерно сходится к решению задачи Дирихле, а погрешность решения имеет порядок $h^2$.

Используя явный параллелизм по данным, исходную расчетную область можно разбить на несколько частично перекрывающихся подобластей. Расчеты в каждой подобласти выполняются независимо друг от друга в рамках итерации Якоби. После каждой итерации Якоби необходимо проводить согласование данных в перекрытиях. С помощью технологии MPI была реализована описанная выше задача. Стандартной функцией замера времени языка MPI - double MPI_Wtime(void), были произведены замеры времени на основе, которых составлены графики ускорения, эффективности.

Потенциальное ускорение алгоритма оценивается как отношение времени вычисления на одном процессоре $T_1$ к времени вычислений на p процессорах $T_p$: $S_p = \frac{T_1}{Tp}$ ,эффективность алгоритма оценивается как отношение ускорения к количеству процессоров p: $E_p = \frac{S_p}{p}$. Время вычислений на p процессорах $T_p$ можно также представить в виде: $T_p = T_{calc} + T_{comm}$.Так как время вычислений на p процессорах зависит не только от времени затрачиваемого на расчёты итераций - $T_{calc}$ , но и на время обменов данными между процессорами - $T_{comm}$.Поэтому также в работе произведён расчёт изменения времени коммуникаций(обменов) и времени расчетов для поставленной задачи с использованием блокирующих и неблокирующих обменов MPI.

Исследование ускорения и эффективности численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона MPI-версии метода Якоби на сетках размерности $100 \times 100$, $200 \times 200$, $400 \times 400$, $800 \times 800$, $1600 \times 1600$. Результаты этих исследований приведены на рис. 1–4. Из представленных графиков видно, что эффективность более 30% достигается только на сетках больших размерностей (N ≥800).

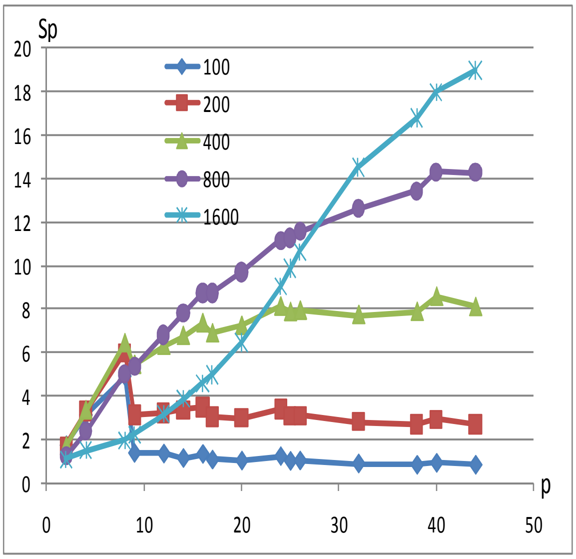


Рис. 1. Ускорение численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

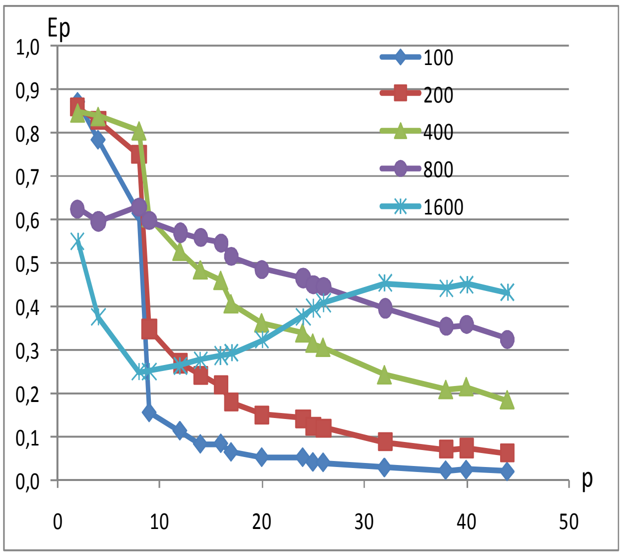


Рис.2. Эффективность численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

MPI-версии метода Якоби для неблокирующей передачи

MPI-версии метода Якоби для неблокирующей передачи.

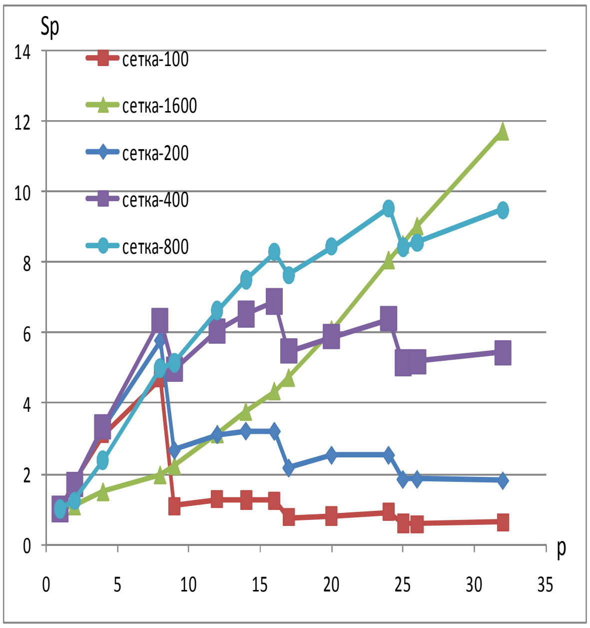


Рис.3. Ускорение численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона MPI-версии метода Якоби для блокирующей передачи.

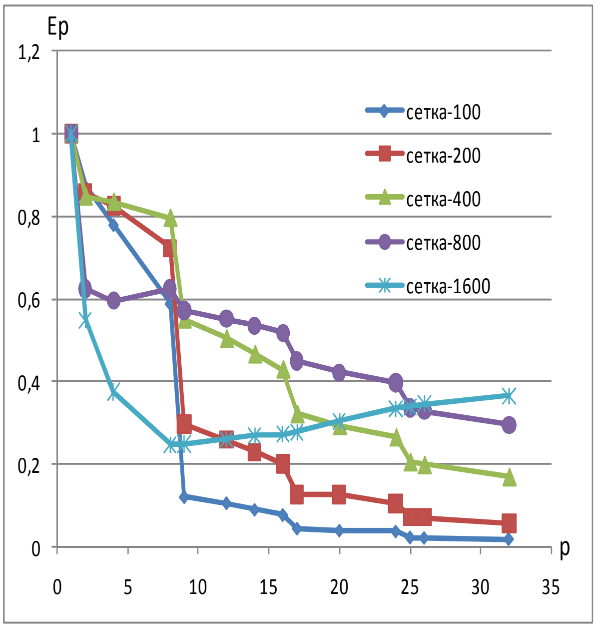


Рис. 4. Эффективность численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона MPI-версии метода Якоби для блокирующей передачи

В работе также исследовано время, затрачиваемое на вычисления и обмены по отдельности, и их влияние на общее время расчетов (рис. 5–7).

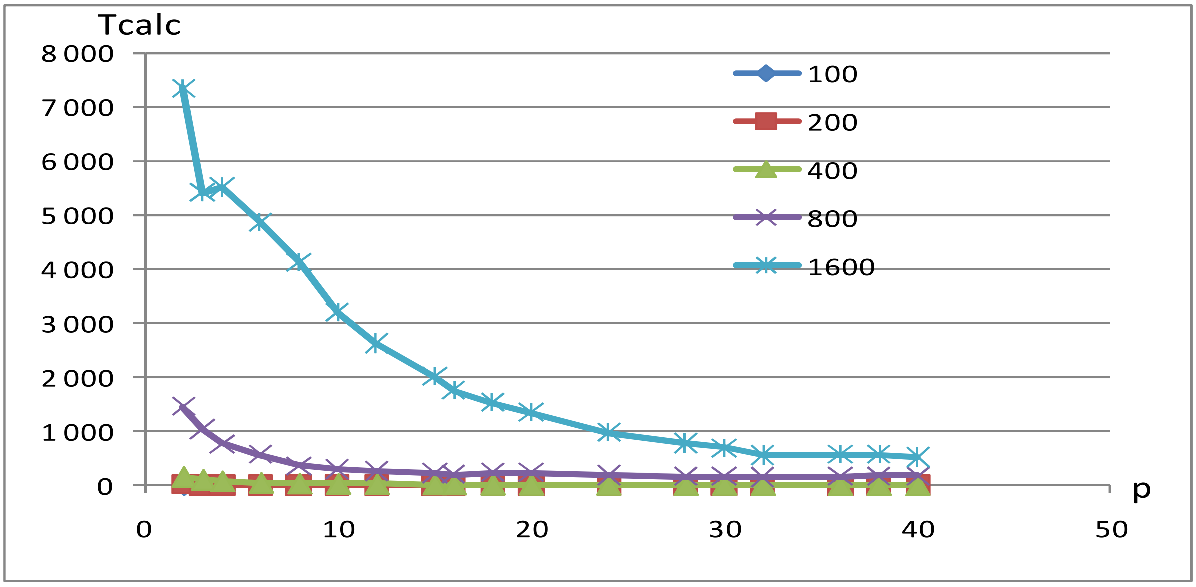


Рис. 5. Время, затрачиваемое на содержательные вычисления на p ядрах отнесенное к

времени счета задачи на одном ядре.

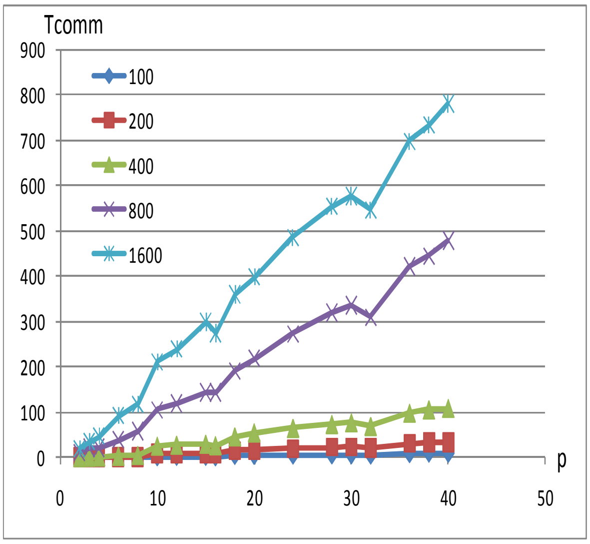


Рис. 6. Время, затрачиваемое на обмены при реализации коммуникаций точка-точка с помощью блокирующих функций на p ядрах отнесенное к времени счета задачи на одном ядре.

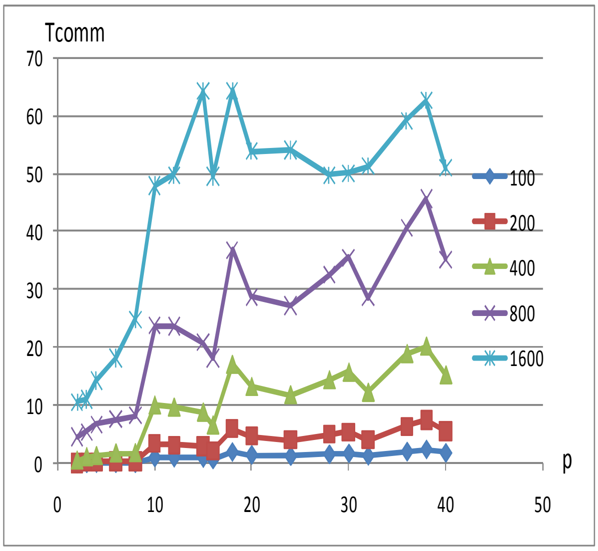


Рис. 7. Время, затрачиваемое на обмены при реализации коммуникаций точка-точка с помощью неблокирующих функций.

Из рис. 6–7 видно, что реализация двухточечных обменов с помощью неблокирующих передач выгоднее, чем блокирующих. Кроме того время обменов на сетках малой размерности существенно преобладает над временем вычислений.