УДК 519.612

РЕШЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Кармышева И.И.
Научный руководитель – профессор Добронец Б.С.

Сибирский федеральный университет

В данной работе рассматривается решение интервальных систем линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) с коэффициентами, зависящими от параметров. Предложены несколько способов уточнения границ полученного решения.

Рассмотрим ИСЛАУ с коэффициентами, зависящими от параметров

$$A(\vec{p})\boldsymbol{x} = b(\vec{p})$$

где $b(\vec{p}) = (b_i)$ – известный вектор, $A(\vec{p}) = (a_{ij})$ – невырожденная матрица, $i, j = 1, \dots, n,\ \vec{p}$- интервальный вектор. Предположим, что $\vec{p}$ содержит ошибки и известно, что его элементы принадлежат соответствующим интервальным числам

$\vec{p} \in \vec{\boldsymbol{p}}$.

Множество векторов

$$\chi = \{x | A(\vec{p})\boldsymbol{x} = b(\vec{p}), \vec{p} \in \vec{\boldsymbol{p}}\}$$

назовем *множеством решений системы*

$$A(\vec{\boldsymbol{p}})\boldsymbol{x} = b(\vec{\boldsymbol{p}}) \qquad (1)$$

Решаем систему (1) методом прогонки для ИСЛАУ с трехдиагональной матрицей. Данный метод дает довольно широкие интервалы решения. Поэтому перейдем к методам уточнения границ решения.

1) Матрица A зависит от интервального вектора $\vec{\boldsymbol{p}}$**.** Предположим, что $\vec{\boldsymbol{p}} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$**.** Далее делаем интервальные расширения по $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ и находим новые прогоночные коэффициенты $\alpha_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ и .$\beta_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$. Если $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ встречаются один раз и в первой степени, то нижняя и верхняя границы решения достигаются на границах интервала. Если же это не так, то решение не обязательно будет на границах интервала. Чтобы избежать этого мы можем попытаться найти $\boldsymbol{p}_i$ для которых

$$\frac{\partial\alpha(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{p}_i} \not\ni 0$$

С $\beta_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ аналогично. Это означает, что по этим переменным функция монотонна и, следовательно, нижняя и верхняя границы достигаются на границах интервала. Т.е, в зависимости от знака $\frac{\partial\alpha(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{p}_i}$ мы находим $\boldsymbol{p}^*$

$$\boldsymbol{p}^* = \begin{cases} \bar{p}_i \;\; при \;\; \dfrac{\partial\alpha(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{p}_i} > 0 \\ \underline{p}_i \; при \; \dfrac{\partial\alpha(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{p}_i} < 0 \\ \boldsymbol{p}_i \; при \; \dfrac{\partial\alpha(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{p}_i} \ni 0 \end{cases}$$

Далее производим замену $\boldsymbol{p}_i$ на $\boldsymbol{p}^*$. Данную процедуру продолжаем до тех пор, пока идет сужение интервалов.

2) Метод интервального анализа чувствительности (МИАЧ) представлен для нахождения интервальных расширений линейных систем алгебраических уравнений.

Рассматриваем ИСЛАУ (1). Пусть нам известны интервальные расширения соответствующих производных

$$\frac{\partial\boldsymbol{x}_k(\vec{\boldsymbol{p}})}{\partial\boldsymbol{p}_i}$$

от k –ой компоненты вектора решений системы уравнений (1) по i –му элементу вектора $\boldsymbol{p}$. Обозначим $\tilde{x}_i$ – интервальное решение задачи, определяемое как

$$\tilde{A}(\vec{\boldsymbol{p}})\tilde{x}_i = \tilde{b}(\vec{\boldsymbol{p}})$$

Уточнять решение будем исходя из условия

$$\tilde{p}_i = \begin{cases} \bar{p}_i \;\; при \;\; \dfrac{\partial\boldsymbol{x}_i(\vec{\boldsymbol{p}})}{\partial\boldsymbol{p}_i} > 0 \\ \underline{p}_i \; при \; \dfrac{\partial\boldsymbol{x}_i(\vec{\boldsymbol{p}})}{\partial\boldsymbol{p}_i} < 0 \\ \boldsymbol{p}_i \; при \; \dfrac{\partial\boldsymbol{x}_i(\vec{\boldsymbol{p}})}{\partial\boldsymbol{p}_i} \ni 0 \end{cases}$$

где интервальные расширения производных находятся из системы

$$A\frac{\partial\boldsymbol{x}_i(\vec{\boldsymbol{p}})}{\partial\boldsymbol{p}_i} = -\frac{\partial A(\vec{\boldsymbol{p}})}{\partial\boldsymbol{p}_i}\boldsymbol{x}$$

Таким образом, находим интервальные расширения производных. Учитывая их знак, мы можем уточнить параметр $\tilde{p}_i$. С его помощью мы получаем новую систему

$$\tilde{A}(\vec{\boldsymbol{p}})\tilde{x}_i = \tilde{b}(\vec{\boldsymbol{p}})$$

Решаем её и находим $\tilde{x}_i$. Данную процедуру продолжаем до тех пор, пока возможно уточнение $\tilde{p}_i$.