УДК 517.9

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Романенко Г.В.
Научный руководитель – доцент Фроленков И.В.

Сибирский федеральный университет

В работе исследуется корректность обратной задачи для многомерного параболического уравнения. Существование и единственность решения доказывается в классе гладких ограниченных функций. Для приведения обратной задачи к прямой используется подход, предложенный Ю.Е. Аниконовым в работе «О методах исследования многомерных обратных задач для эволюционных уравнений». Используются условия переопределения специального вида. Исходная обратная задача разбивается на две задачи, одна из которых является обычной задачей Коши для параболического уравнения, а вторая содержит выражение для неизвестного коэффициента. Существование решения прямой задачи доказано методом слабой аппроксимации.

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid x \in R^n, z \in R, 0 \le t \le T\}$ задачу Коши для параболического уравнения

$$u_t = a(t)u_{zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u(t,x,z) + \lambda(t,z)B_z(u),$$

где $B_z(u) = c_1(t)u_{zz}(t,x,z) + c_2(t)u_z(t,x,z) + c_3(t)u(t,x,z)$, с начальным условием

$$u(0,x,z) = u_0(x,z).$$

Функции $a(t), b(t), c(t)$ – непрерывные, ограниченные на $[0,T]$, причем $a(t) \ge a_0 > 0$, $b(t) \ge b_0 > 0$, $c_i(t) > 0$ $(i = 1,2)$. Функция $u_0(x,z)$ действительнозначная и задана в R^{n+1}.

Функция $\lambda(t,z)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи Коши.

Выполнено условие переопределения $u(t,0,z) = \psi(t,z)$ и условие согласования $u_0(0,z) = \psi(0,z)$.

Считаем выполненным условие

$$|B_z(\psi)| = |c_1(t)\psi_{zz}(t,z) + c_2(t)\psi_z(t,z) + c_3(t)\psi(t,z)| \ge \mu > 0, \quad \mu - const.$$

Частным случаем теоремы, сформулированной Ю.Е. Аниконовым, является следующая теорема.

Теорема: *Если существуют решения $\varphi(t,x)$ и $f(t,z)$ следующих задач Коши*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=b(t)\Delta_x\varphi(t,x), \qquad \varphi(0,x)=\omega_0(x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=a(t)f_{zz}(t,z)+B_z(f)\frac{\psi_t(t,z)-a(t)\psi_{zz}(t,z)-f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}, \qquad f(0,z)=v_0(z),$$

то функции $\lambda(t,z)$ *и* $u(t,x,z)$, *определенные формулами*

$$u(t,x,z)=\varphi(t,x)f(t,z),$$

$$\lambda(t,z)=\frac{\psi_t(t,z)-a(t)\psi_{zz}(t,z)-f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},$$

есть решение исходной обратной задачи в предположении, что $u_0(t,x,z)=\omega_0(x)v_0(z)$.

Для доказательства существования решения задачи

$$\frac{\partial f}{\partial t}=a(t)f_{zz}(t,z)+B_z(f)\frac{\psi_t(t,z)-a(t)\psi_{zz}(t,z)-f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}, \qquad f(0,z)=v_0(z),$$

рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{\partial f}{\partial t}=a(t)f_{zz}(t,z)+B_z(f)S_\delta\left(\frac{\beta(t,z)-f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}\right), \qquad f(0,z)=v_0(z),$$

здесь $\beta(t,z)=\psi_t(t,z)-a(t)\psi_{zz}(t,z)$ – это известная функция, $S_\delta(\theta)$ – функция срезки, определенная в R, сколь угодно раз непрерывно дифференцируемая и обладающая свойствами:

$$S_\delta\ge\frac{\delta}{3}>0, \quad \theta\in R, \quad S_\delta(\theta)=\begin{cases}\theta, & при \quad \theta\ge\dfrac{\delta}{2},\\ \dfrac{\delta}{3}, & при \quad \theta\ge\dfrac{\delta}{3}.\end{cases}$$

Определению подлежит функция $f(t,z)$. Функция $v_0(z)$ действительнозначная и задана в R. Функция $S_\delta^{(k)}(\theta)\le 2, \quad k=1,\dots,4.$

Для доказательства существования решения вспомогательной задачи используем метод слабой аппроксимации. Фиксируем постоянную $\tau>0$ такую, что $\tau N=T$. Разбиваем задачу на три дробных шага и линеаризуем задачу сдвигом по переменной t на величину $\dfrac{\tau}{3}$.

$$f_t^\tau(t,z)=3a(t)f_{zz}^\tau(t,z), \qquad n\tau<t\le\left(n+\frac{1}{3}\right)\tau,$$

$$f_t^\tau(t,z)=3(c_1(t)f_{zz}^\tau(t,z)+c_2(t)f_z^\tau(t,z))S_\delta(\lambda^\tau(t,z)), \qquad \left(n+\frac{1}{3}\right)\tau<t\le\left(n+\frac{2}{3}\right)\tau,$$

$$f_t^\tau(t,z)=3c_3(t)\,f^\tau(t,z))S_\delta(\lambda^\tau(t,z)), \qquad \left(n+\frac{2}{3}\right)\tau<t\le(n+1)\tau,$$

$$f^\tau(0,z)=v_0(z), \qquad n=0,1,2,\ldots,(N-1), \quad N\tau=T,$$

где $\lambda^\tau(t,z)=\dfrac{\beta(t,z)-f^\tau(t-\frac{\tau}{3},z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}$.

Относительно функций $v_0(z),\ \psi(t,z)$ предположим, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение и удовлетворяют ему:

$$\left|\frac{d^k}{dz^k}v_0(z)\right|+\left|\frac{\partial^i}{\partial z^i}\psi(t,z)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\psi(t,z)\right|\le C, \quad k=0,\ldots,4, \quad i=0,\ldots,6.$$

В работе доказаны априорные оценки, гарантирующие компактность семейства $f^\tau(t,z)$ расщепленной задачи в классе гладких непрерывных функций. В области $G_{[0,t^*]}$ справедливы равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}f^\tau(t,z)\right|\le C, \quad k=0,\ldots,4.$$

Здесь $0<t^*\le T$ – некоторая константа, зависящая постоянных, ограничивающих входные данные.

В итоге получаем, что справедлива равномерная по τ оценка

$$\left|f_t^\tau(t,z)\right|\le C, \qquad (t,z)\in G_{[0,t^*]}.$$

Дифференцируя уравнения расщепленной задачи по переменной z один или два раза, получим равномерные по τ оценки

$$\left|f_{tz}^\tau(t,z)\right|+\left|f_{tzz}^\tau(t,z)\right|\le C, \qquad (t,z)\in G_{[0,t^*]},$$

что вместе с ранее полученными равномерными по τ оценками гарантирует выполнение условий теоремы Арцела о компактности.

В силу теоремы Арцела о компактности, некоторая подпоследовательность $f^{\tau_k}(t,z)$ последовательности $f^\tau(t,z)$ решений расщепленной задачи сходится вместе с производными по z до второго порядка включительно к функции $f(t,z)\in C_{t,z}^{0,2}(G_{[0,t^*]})$.

На основании теоремы МСА, $f(t,z)$ – решение вспомогательной задачи, причем $f(t,z)\in C_{t,z}^{1,2}(G_{[0,t^*]})$, где

$$C_{t,z}^{1,2}(G_{[0,t^*]})=\left\{f(t,z)\,\middle|\,f_t(t,z),\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(t,z)\in C(G_{[0,t^*]}),k=0,1,2.\right\}$$

При этом

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} f^{\tau}(t,z)\right| \le C, \quad k = 0,1,2.$$

В предположении, что выполняется условие при $(t,z) \in G_{[0,t^*]}$

$$\frac{\beta(t,z) - v_0(z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \ge \delta,$$

доказано, что

$$\frac{\beta(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \ge \frac{\delta}{2}.$$

Из определения срезающей функции $S_\delta(\theta)$ и последней оценки следует, что $f(t,z)$ – решение исходной прямой задачи.

Таким образом, доказано существование решения функции $f(t,z)$ прямой задачи в классе $C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})$. Единственность решения прямой задачи показана путем доказательства тождественного равенства нулю в $G_{[0,t^*]}$ разности двух предполагаемых решений.

Справедлива

Теорема: *Пусть выполняются предположенные выше условия. Тогда решение* $f(t,z)$ *прямой задачи в классе*

$$C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{ f(t,z) \middle| f_t(t,z), \frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z) \in C(G_{[0,t^*]}), k = 0,1,2 \right\},$$

удовлетворяющее соотношению $\sum_{k=0}^{2}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z)\right| \le C$, *существует и единственно.*