

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Резникова И.А.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор
Андреев В.К.

Сибирский федеральный университет

1. Постановка задачи

Имеются две функции $u_1(r, \theta, \varphi)$, $u_2(r, \theta, \varphi)$, зависящие от сферических координат (r, θ, φ) . Функция $u_1(r, \theta, \varphi)$ определена в шаре $0 \leq r \leq R_1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, а $u_2(r, \theta, \varphi)$ - в слое $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Функции $u_{1,2}$ в своих областях определения удовлетворяют уравнениям

$$-k_1 \Delta u_1 = \lambda u_1, \quad (r, \theta, \varphi) \in \Omega_1, \quad (1.1)$$

$$-k_2 \Delta u_2 = \lambda u_2, \quad (r, \theta, \varphi) \in \Omega_2, \quad (1.2)$$

где $k_{1,2}$ – известные положительные постоянные; λ – неизвестный параметр; $\Omega_{1,2}$ – открытый шар радиуса R_1 и открытый слой $R_1 < r < R_2$, соответственно.

Кроме того, имеются граничные условия

$$u_1|_{r=R_1} = u_2|_{r=R_1}, \quad (1.3)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (1.4)$$

$$u_2|_{r=R_2} = 0. \quad (1.5)$$

Требуется найти функции $u_1 \in C^2(\Omega_1) \cap C^1(\Gamma_1)$, $\Gamma_1 = \{r / r = R_1\}$, $u_2 \in C^2(\Omega_2) \cap C^1(\Gamma_1) \cap C(\Gamma_2)$, $\Gamma_2 = \{r / r = R_2\}$ и параметр λ , удовлетворяющие уравнениям (1.1), (1.2) и условиям (1.3) – (1.5).

2. Доказательство положительности спектрального параметра

Применим формулу Остроградского-Гаусса к (1.1), (1.2) (черта означает комплексно сопряжённую величину)

$$\begin{aligned} -k_1 \int_{\Omega_1} \Delta u_1 \bar{u}_1 d\Omega_1 &= k_1 \left(\int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2 d\Omega_1 - \int_{\Gamma_1} \bar{u}_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} d\Gamma_1 \right) = \lambda \int_{\Omega_1} |u_1|^2 d\Omega_1, \\ -k_2 \int_{\Omega_2} \Delta u_2 \bar{u}_2 d\Omega_2 &= k_2 \left(\int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2 d\Omega_2 + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} \bar{u}_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} d\Gamma_2 \right) = \\ &= \lambda \int_{\Omega_2} |u_2|^2 d\Omega_2. \end{aligned}$$

Складывая и пользуясь граничными условиями (1.3) – (1.5), выводим равенство

$$\lambda \left(\int_{\Omega_1} |u_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} |u_2|^2 d\Omega_2 \right) = k_1 \int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2 d\Omega_1 + k_2 \int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2 d\Omega_2.$$

Следовательно, $\lambda > 0$. Если $\lambda = 0$, то $u_j \equiv 0$, $j = 1, 2$. Далее будем считать $\lambda > 0$ и искать нетривиальные решения.

3. Разделение переменных

$$-k_j \Delta u_j = -k_j \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_j}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_j}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_j}{\partial \varphi^2} \right) = \lambda u_j.$$

Полагаем $u_j(r, \theta, \varphi) = R_j(r) T(\theta, \varphi)$:

$$-k_j \left(\frac{T}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_j}{dr} \right) + \frac{R_j}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) \right) = \lambda R_j T. \quad (3.1)$$

Пусть $T(\theta, \varphi)$ – решение уравнения

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = -\mu T.$$

Оно имеет вид:

$$T_n(\theta, \varphi) = a_0 P_n(\cos \theta) + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) P_n^{(k)}(\cos \theta).$$

Для $R_j(r)$ имеем из (3.1) уравнение, родственное уравнению Бесселя

$$r^2 R_j'' + 2r R_j' + R_j \left(\frac{\lambda}{k_j} r^2 - \mu \right) = 0.$$

Его решение таково:

$$R_{jn} = r^{-\frac{1}{2}} \left(C_1^j J_{n+\frac{1}{2}} \left(r \sqrt{\frac{\lambda}{k_j}} \right) + C_2^j Y_{n+\frac{1}{2}} \left(r \sqrt{\frac{\lambda}{k_j}} \right) \right).$$

$C_2^1 = 0$, так как $|u_1(0, \theta, \varphi)| < \infty$; не ограничивая общности можно считать $C_1^1 = 1$. Следовательно

$$\begin{aligned} R_{1n} &= r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}} \left(r \sqrt{\frac{\lambda}{k_1}} \right), \\ R_{2n} &= r^{-\frac{1}{2}} \left(C_1 J_{n+\frac{1}{2}} \left(r \sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} \right) + C_2 Y_{n+\frac{1}{2}} \left(r \sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} \right) \right), \\ u_{jn}(r, \theta, \varphi) &= R_{jn}(r) T_n(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Подставляя решение в граничные условия (1.3) – (1.5), найдём C_1, C_2 и уравнение на λ :

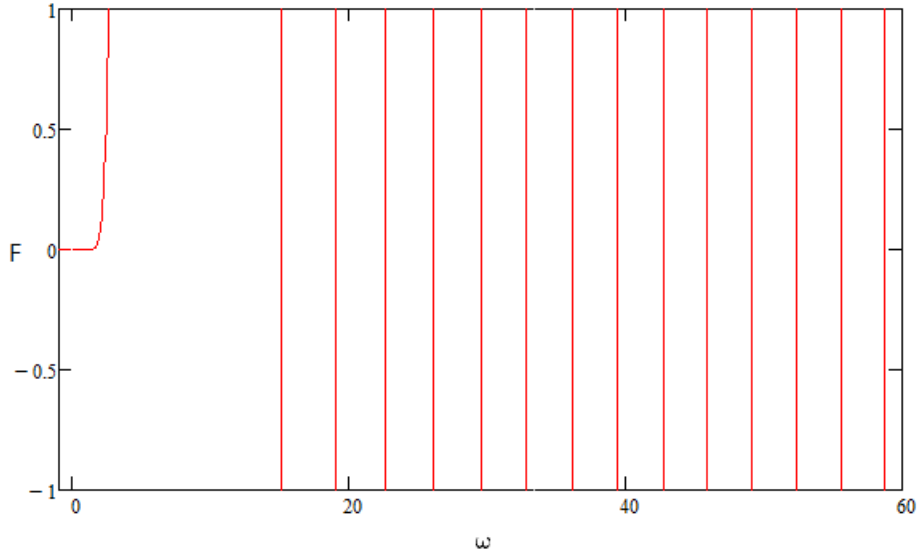
$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{Y_{n+\frac{1}{2}} \left(R_2 \sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left(R_1 \sqrt{\frac{\lambda}{k_1}} \right)}{Y_{n+\frac{1}{2}} \left(R_2 \sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left(R_1 \sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} \right) - Y_{n+\frac{1}{2}} \left(R_1 \sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left(R_2 \sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} \right)}, \\ C_2 &= \frac{J_{n+\frac{1}{2}} \left(R_2 \sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left(R_1 \sqrt{\frac{\lambda}{k_1}} \right)}{Y_{n+\frac{1}{2}} \left(R_1 \sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left(R_2 \sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} \right) - Y_{n+\frac{1}{2}} \left(R_2 \sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left(R_1 \sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} \right)}, \\ k_1 \left(\sqrt{\frac{\lambda}{k_1}} J_{n-\frac{1}{2}} \left(R_1 \sqrt{\frac{\lambda}{k_1}} \right) - \frac{n+1}{R_1} J_{n+\frac{1}{2}} \left(R_1 \sqrt{\frac{\lambda}{k_1}} \right) \right) &= \\ = k_2 C_1 \left(\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} J_{n-\frac{1}{2}} \left(R_1 \sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} \right) - \frac{n+1}{R_1} J_{n+\frac{1}{2}} \left(R_1 \sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} \right) \right) &+ \\ + k_2 C_2 \left(\sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} Y_{n-\frac{1}{2}} \left(R_1 \sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} \right) - \frac{n+1}{R_1} Y_{n+\frac{1}{2}} \left(R_1 \sqrt{\frac{\lambda}{k_2}} \right) \right). \end{aligned}$$

Перейдём к безразмерным переменным $k = k_1/k_2, \omega^2 = \lambda R_1^2/k_1, R = R_1/R_2$, тогда

характеристическое уравнение на λ примет вид

$$\begin{aligned}
F(\omega, k, R, n) \equiv & \frac{k \left(\omega J_{n-\frac{1}{2}}(\omega) - (n+1) J_{n+\frac{1}{2}}(\omega) \right)}{J_{n+\frac{1}{2}}(\omega)} - \frac{Y_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega\sqrt{k}}{R}\right) \left(\omega\sqrt{k} J_{n-\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) - (n+1) J_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) \right)}{J_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) Y_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega\sqrt{k}}{R}\right) - Y_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega\sqrt{k}}{R}\right)} + \\
& + \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega\sqrt{k}}{R}\right) \left(\omega\sqrt{k} Y_{n-\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) - (n+1) Y_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) \right)}{J_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) Y_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega\sqrt{k}}{R}\right) - Y_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega\sqrt{k}}{R}\right)} = 0. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Численное решение при $n=10, k=1, r=0,999999$:



4. Приближение тонкого слоя

Рассмотрим тонкий слой, тогда $\frac{R_2 - R_1}{R_2} = 1 - R = \varepsilon \ll 1, \frac{1}{R} = \frac{1}{1 - \varepsilon} \sim 1 + \varepsilon$.

Используя разложение в ряд Тейлора и формулы для производных функций Бесселя, из уравнения (3.2) находим

$$\begin{aligned}
J_{n+\frac{1}{2}}(\omega) \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon n - 1\right) \left(J_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) Y_{n-\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) - Y_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) J_{n-\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) \right) + \left(J_{n-\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) - Y_{n-\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) \right) o(\varepsilon^2)}{\varepsilon \left(J_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) Y_{n-\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) - Y_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) J_{n-\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) \right) + \left(J_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) - Y_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) \right) \frac{o(\varepsilon^2)}{\omega\sqrt{k}}} \approx \\
\approx (1 - k)(n + 1) J_{n+\frac{1}{2}}(\omega) + k\omega J_{n-\frac{1}{2}}(\omega).
\end{aligned}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ в нулевом приближении получим $J_{n+\frac{1}{2}}(\omega_0) \approx 0$, то есть $\omega_0^{(n)}$ такое же, как будто бы шар был однородным.