УДК 735.29.(32)

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДВУДОЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

Агафонов К.Е.
Научный руководитель – доцент Семенова Д.В.

Институт математики
Сибирский федеральный университет

Аннотация. В данной работе рассматривается распределения двудольных случайных векторов, а также построение модельных примеров используя классические распределения.

В работе исследуются распределения двудольных случайных векторов [1,2], компоненты которых конструируются из произвольных случайных величин добавлением атома в нуле. Также конструируются модельные примеры с основными типами дискретных и случайных величин для количественной надстройки. Данные модели используются при моделировании товарных рынков [1], в которых необходимо учитывать количественную и многоуровневую структуру зависимости. Рассматриваются основные структуры случайно множественного базиса, а именно непересекающиеся, вложенные и независимые [3].

Множество случайных событий $\mathrm{X} \subseteq$ □, выбранных из алгебры вероятностного пространства (Ω, □, $\mathbf{P}$), или (что эквивалентно), *случайное множество событий* [3]

$$K\colon (\Omega, \square, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathrm{X}}, 2^{2^{\mathrm{X}}}\right)$$

под конечным множеством событий X можно определить эквивалентным образом, задав на множестве 2^{X} (всех подмножеств конечного множества X) одну из следующих функций множеств:

$$p(X)= \mathbf{P}\,(K=X)= \mathbf{P}(\mathrm{ter}(X))= \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x \bigcap_{x\in X^C} x^c\right), \text{ где } X \in 2^{\mathrm{X}}$$

- *эвентологическое распределение (Э-распределение) I-рода,*

$$p_X= \mathbf{P}\,(K\supseteq X)= \mathbf{P}(\mathrm{ter}_X)= \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x\right), \text{ где } X \in 2^{\mathrm{X}}$$

- *эвентологическое распределение (Э-распределение) II-рода*.

Рассмотрим произвольную случайную величину η с функцией распределения $F_\eta(u)$, непрерывной в нуле, и конечным математическим ожиданием $\mathbf{E}\eta<\infty$. Добавим случайной величине η "атом" в нуле с вероятностью *1-p*, сохранив ей прежнее распределение с вероятностью *p*, и обозначим полученную случайную величину $\xi(p)$. Таким образом, можно сказать, что случайная величина $\xi(p)$ принимает два *обобщенных значения*, из которых одно - обычный нуль с вероятностью *1-p*, а второе - случайная величина η с вероятностью *p* [1]:

$$\xi(p)=\begin{cases}0, & \text{с вероятностью } 1-p,\\ \eta, & \text{с вероятностью } p.\end{cases}$$

По сути дела речь идет о смеси распределений. Полученная случайная величина будет иметь функцию распределения

$$F_{\xi}(u)=\begin{cases} pF_{\eta}(u), & u<0,\\ 1-p+pF_{\eta}(u), & u\ge 0,\end{cases}$$

сохраняющую свойство непрерывности слева в каждой точке действительной оси.

В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема о разложении распределения двудольного случайного вектора по случайно-множественному базису. *Пусть* $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{p}}=\{\xi_x(p_x),\ x\in \mathrm{X}\}$ - *двудольный случайный вектор, составленный из* $N=|\mathrm{X}|$ *двудольных случайных величин, с совместной* N*-мерной функцией распределения* $F_{\mathbf{p}}(\{u_x,\ x\in \mathrm{X}\})=\mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in\mathrm{X}}\{\xi_x(p_x)<u_x\}\right)$. *Тогда для функции* $F_{\mathbf{p}}(\{u_x,\ x\in \mathrm{X}\})$ *справедливо разложение*

$$F_{\mathbf{p}}(\{u_x,\ x\in \mathrm{X}\})=\sum_{X\in 2^{\mathrm{X}}} F_X(u_x,\ x\in \mathrm{X})p(X),$$

где $F_X(\{u_x,\ x\in \mathrm{X}\})=\mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in\mathrm{X}}\{\xi_x(p_x)<u_x|e_X\}\right)$ - *условные функции распределения двудольного случайного вектора* $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{p}}$ *при условии случайного события* $e_X=\left\{\bigcap_{x\in X}\{\xi_x(p_x)\ne 0\}\bigcap_{x\in X^c}\{\xi_x(p_x)=0\}\right\}$, *а* $p(X)=\mathbf{P}(e_X)$, $X\subseteq \mathrm{X}$, *вероятность такого события.*

Нульмерная функция распределения $F_{\varnothing}(\cdot)=\mathbf{P}(\bullet|\varnothing)=\prod_{x\in\mathrm{X}}\mathbf{1}_{\{u_x\ge 0\}}$ - это функция распределения вырожденного случайного вектора, который принимает единственное нулевое значение: $\{0,\ldots,0\}$, она равна единице всякий раз, когда все u_x неотрицательны. Совокупность условных функций распределения $\{F_X(\{u_x, x\in \mathrm{X}|e_X\}), X\subseteq \mathrm{X}\ \}$ образуют количественную надстройку [1, 2].

Таким образом, можно говорить о двухуровневой структуре зависимостей. Первый случайно-множественный уровень отвечает за полную структуру статистических зависимостей и взаимодействий случайных событий, образует случайно-множественный базис, а второй количественный уровень - за структуру зависимостей и взаимодействий компонент двудольного случайного вектора в количественной надстройке.

Пусть количественная надстройка состоит из непрерывных и дифференцируемых функций распределения. Тогда существуют условные плотности и очевидно следующее утверждение [4].

Лемма. $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{p}}=\{\xi_x(p_x),\ x\in \mathrm{X}\}$ - *двудольный случайный вектор, составленный из* $N=|\mathrm{X}|$ *двудольных случайных величин, с совместной* N*-мерной функцией плотности* $f_{\mathbf{p}}(\{u_x,\ x\in \mathrm{X}\})$. *Тогда для совместной функции плотности двудольного случайного вектора справедливо разложение*

$$f_{\mathbf{p}}(\{u_x,\ x\in \mathrm{X}\})=\sum_{X\in 2^{\mathrm{X}}} f_X(u_x,\ x\in \mathrm{X})p(X),$$

где

$$f_X(u_x,\ x\in \mathrm{X}|e_X)=\frac{\partial F_X(u_x,\ x\in X)}{\partial\{u_x,\ x\in X\}},$$

- *условные совместные плотности двудольного случайного вектора* $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{p}}$ *при условии случайного события* e_X, а $p(X)=\mathbf{P}(e_X)$, $X\subseteq \mathrm{X}$, *вероятность такого события.*

В данной работе представлена демонстрация на конкретных примерах применения теоремы о разложении распределения дискретных и непрерывных двудольных случайных векторов по случайно-множественному базису в независимом и зависимых случаях для двумерного случая. Рассмотрены способы задания количественной надстройки для дискретных величин. Смоделированы зависимости между случайными величинами с помощью функций копул. Построены примеры для различных исходных распределений зависимых случайных величин и распределений случайно-множественного базиса.