

## АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ СОПРЯЖЕННОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Лемешкова Е.Н.

Научный руководитель – д. ф.-м. н. Андреев В.К.

*Сибирский федеральный университет***1. Постановка задачи. Априорные оценки.**

При рассмотрении однонаправленного движения в плоских слоях  $-l_1 < y < 0$ ,  $0 < y < l_2$ ,  $l_2 < y < l_3$  с общими границами раздела  $y = 0$ ,  $y = l_2$  и твёрдыми стенками  $y = -l_1$ ,  $y = l_3$  возникает следующая начально-краевая задача [1]:

$$u_{1t} = \nu_1 u_{1yy} - f_1(t), -l_1 < y < 0; \quad (1)$$

$$u_{2t} = \nu_2 u_{2yy} - f_2(t), 0 < y < l_2; \quad (2)$$

$$u_{3t} = \nu_3 u_{3yy} - f_3(t), l_2 < y < l_3; \quad (3)$$

$$u_j(y, 0) = 0, \quad (4)$$

$$\mu_1 u_{1y}(0, t) - \mu_2 u_{2y}(0, t) = 0, \quad (5)$$

$$\mu_2 u_{2y}(l_2, t) - \mu_3 u_{3y}(l_2, t) = 0, \quad (6)$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), u_2(l_2, t) = u_3(l_2, t), \quad (7)$$

$$u_1(-l_1, t) = 0, u_3(l_3, t) = 0, \quad (8)$$

где функции  $f_j(t)$  связаны равенствами  $\rho_1 f_1 = \rho_2 f_2 = \rho_3 f_3$ .

В (1) – (3), (5), (6)  $\nu_j$  – кинематические вязкости,  $\mu_j = \nu_j \rho_j$  – динамические вязкости, а  $\rho_j$  – плотности жидкостей, суть положительные постоянные ( $j=1, 2, 3$ ).

Получим некоторые априорные оценки задачи (1) – (8). Умножим уравнения (1) – (3) на  $\rho_1 u_1$ ,  $\rho_2 u_2$ ,  $\rho_3 u_3$ , соответственно, и проинтегрируем по  $y$ . Складывая полученные равенства с использованием граничных условий (5) – (8), приходим к соотношению – закону сохранения энергии

$$\frac{dE(t)}{dt} + \mu_1 \int_{-l_1}^0 u_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_0^{l_2} u_{2y}^2 dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} u_{3y}^2 dy = \rho_1 f_1 \left( \int_{-l_1}^0 u_1 dy + \int_0^{l_2} u_2 dy + \int_{l_2}^{l_3} u_3 dy \right) \quad (9)$$

где

$$E(t) = \frac{1}{2} \rho_1 \int_{-l_1}^0 u_1^2 dy + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^{l_2} u_2^2 dy + \frac{1}{2} \rho_3 \int_{l_2}^{l_3} u_3^2 dy \quad (10)$$

есть полная кинетическая энергия трёх слоёв.

Из (9), в частности, вытекает единственность решения задачи (1) – (8): если  $f(t) = 0$ , то и  $u_1(y, t) = u_2(y, t) = u_3(y, t) \equiv 0$ .

Равенство (9) позволяет установить при некоторых ограничениях на градиент давления асимптотическое поведение решения при  $t \rightarrow \infty$ . Действительно, для  $u_1(y, t)$ ,  $u_2(y, t)$ ,  $u_3(y, t)$  справедливо обобщённое неравенство Фридрихса для составных областей

$$\int_{-l_1}^0 u_1^2 dy + \int_0^{l_2} u_2^2 dy + \int_{l_2}^{l_3} u_3^2 dy \leq M(\mu_1 \int_{-l_1}^0 u_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_0^{l_2} u_{2y}^2 dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} u_{3y}^2 dy) \quad (11)$$

Используя неравенства (11), Евклида и Коши – Буняковского, из (9) получаем неравенство

$$\frac{dE(t)}{dt} + 2\delta E(t) \leq \delta_1 \sqrt{E(t)} |f(t)|, \quad (12)$$

где  $\delta = \min\left(\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{1}{\rho_3}\right) / M_0$ ,  $\delta_1 = \sqrt{6} \max\left(\sqrt{\frac{l_1}{\rho_1}}, \sqrt{\frac{l_2}{\rho_2}}, \sqrt{\frac{l_3-l_2}{\rho_3}}\right)$ ,  $M_0$  – минимальная положительная постоянная среди всех  $M > 0$  из неравенства (11). В силу начальных условий (4) из (10)  $E(t) = 0$ , и (12) даёт оценку

$$E(t) \leq \frac{\delta_1^2}{4} \left( \int_0^t |f_1(t)| e^{\delta t} dt \right)^2 e^{-2\delta t}. \quad (13)$$

Следовательно, если сходится интеграл  $\int_0^\infty |f_1(t)| e^{\delta t} dt \equiv \sqrt{C_1}$ , то неравенство (13) примет вид  $E(t) \leq \frac{\delta_1^2}{4} C_1 e^{-2\delta t}$  для всех  $t \geq 0$ . Поэтому желательно, чтобы в априорной оценке  $\delta$  было как можно больше. Справедлива

Лемма. Имеет место неравенство (11) с постоянной  $M_0$  не зависящей от  $u_j(y)$  и являющейся решением вариационной задачи

$$M_0 = \sup_{w_j \in V} \left[ \frac{\int_{-l_1}^0 w_1^2 dy + \int_0^{l_2} w_2^2 dy + \int_{l_2}^{l_3} w_3^2 dy}{\mu_1 \int_{-l_1}^0 w_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_0^{l_2} w_{2y}^2 dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy} \right], \quad (14)$$

множество  $V$  – подпространство прямого произведения  $W_2^1(-l_1, 0) \times W_2^1(0, l_2) \times W_2^1(l_2, l_3)$ , и для  $w_j(y)$  выполнены граничные условия (5) – (8).

*Доказательство.* Рассмотрим функционал

$$F(w_1, w_2, w_3) = \sup_{w_j \in V} \left[ \frac{\int_{-l_1}^0 w_1^2 dy + \int_0^{l_2} w_2^2 dy + \int_{l_2}^{l_3} w_3^2 dy}{\mu_1 \int_{-l_1}^0 w_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_0^{l_2} w_{2y}^2 dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy} \right], \quad (15)$$

Очевидно, что функция  $f(\tau) = F(w_1 + \tau h_1, w_2 + \tau h_2, w_3 + \tau h_3)$  имеет производную при  $\tau = 0$  для всех  $h_j \in V, j = 1, 2, 3$ , а  $F$  дифференцируем по Фреше. Тогда существует первая вариация по Лагранжу функционала  $F$  в точке  $(w_1, w_2, w_3)$  и  $\delta F(w_1, w_2, w_3)(h_1, h_2, h_3) = f'(0)$  (первая вариация здесь не выписывается ввиду громоздкости).

Пусть теперь на  $w_j$  достигается равенство (14). Имеем  $F(w_1, w_2, w_3) = M_0$  и  $\delta F(w_1, w_2, w_3)(h_1, h_2, h_3) = 0$ . Пользуясь произволом функций  $h_1 \in W_2^1(-l_1, 0)$ ,  $h_2 \in W_2^1(0, l_2)$ ,  $h_3 \in W_2^1(l_2, l_3)$ , получим из выражения для первой вариации равенства

$$\int_{-l_1}^0 (w_1 h_1 - \mu_1 M_0 w_{1y} h_{1y}) dy = 0, \int_0^{l_2} (w_2 h_2 - \mu_2 M_0 w_{2y} h_{2y}) dy = 0,$$

$$\int_{l_2}^{l_3} (w_3 h_3 - \mu_3 M_0 w_{3y} h_{3y}) dy = 0.$$

По лемме Дюбуа – Реймона [2] отсюда получим уравнения Эйлера вариационной задачи (14) (по этой лемме вторые производные  $w_{jyy}$  существуют)

$$w_{1yy} + \frac{1}{\mu_1 M_0} w_1 = 0, -l_1 < y < 0,$$

$$w_{2yy} + \frac{1}{\mu_2 M_0} w_2 = 0, 0 < y < l_2,$$

$$w_{3yy} + \frac{1}{\mu_3 M_0} w_3 = 0, l_2 < y < l_3.$$
(16)

Общие решения уравнений (16) имеют вид ( $j = 1, 2, 3$ )

$$w_j = C_1^j \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_j M_0}} y\right) + C_2^j \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_j M_0}} y\right).$$

С учётом граничных условий (5) – (8) получим систему линейных однородных уравнений на постоянные  $C_1^j, C_2^j$

$$C_1^2 = \sqrt{\mu_1} C_1^1, C_1^1 = C_2^2, C_2^1 = C_1^1 tg(a_1 a_3 z),$$

$$C_1^2 \sin(a_4 z) + C_2^2 \cos(a_4 z) - C_1^3 \sin(z) - C_2^3 \cos(z) = 0,$$

$$\sqrt{\mu_1}(C_1^2 \cos(a_4 z) - C_2^2 \sin(a_4 z)) - C_1^3 \cos(z) + C_2^3 \sin(z) = 0,$$

$$C_1^3 \sin(a_2 z) + C_2^3 \cos(a_2 z) = 0.$$

Нетривиальное решение последней системы существует тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{\mu_2} \sin((1 - a_2)z) (\sqrt{\mu_1} \cos(a_4 z) - tg(a_1 a_3 z) \sin(a_4 z)) -$$

$$- \cos((1 - a_2)z) (\sqrt{\mu_1} \sin(a_4 z) + tg(a_1 a_3 z) \cos(a_4 z)) = 0,$$
(17)

где  $z = l_2/(\mu_3 M_0)^{1/2}$ ,  $a_1 = l_1/l_2$ ,  $a_2 = l_3/l_2$ ,  $a_3 = (\mu_1 \mu_2)^{-1/2}$ ,  $a_4 = (\mu_2)^{-1/2}$ ,

$\overline{\mu_1} = \mu_1/\mu_2$ ,  $\overline{\mu_2} = \mu_2/\mu_3$ .

Уравнение (17) относительно  $z$  имеет счётное число положительных решений. Минимальное среди них  $z_0$  является искомым  $M_0 = l_2^2/(\mu_3 z_0^2)$ . В частности, при  $a_2 = 1$ , (толщины второго и третьего слоя совпадают) и  $\bar{\mu}_1 = 1$  (динамические вязкости первого и третьего слоя совпадают) получим  $M_0 = l_2^2(a_4 + a_3 a_1)^2/(\mu_3 \pi^2)$ .

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №11-01-00283.*

## **Литература**

- [1] Лемешкова Е.Н., Решение начально - краевой задачи о совместном движении трёх вязких жидкостей в плоских слоях // Труды XLIII краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам. Красноярск, СФУ. 2010. - с. 70-72.
- [2] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В., Оптимальное управление, М., Наука, 1979. - с. 62.