УДК 378

КУРТ ГЕДЕЛЬ И ЕГО ТЕОРЕМА О НЕПОЛНОТЕ (МИРОВОЗЗРЕНЧЕСКИЙ АСПЕКТ)

Дымков Д.О., Крапивина М.И.
Научный руководитель – д.п.н., профессор Осипова С.И

Сибирский федеральный университет

Однажды один из величайших в мире математиков Карл Фридрих Гаусс сказал «Математика – царица наук», и это правда. Роль математики в жизни людей сложно описать словами, она является фундаментом всех современных наук, и даже представить сложно какие еще возможности она может открыть перед нами. Математика – мировой язык подобный музыке или живописи. Нельзя точно сказать, что математика это точная наука, скорее математика – это мировоззрение, философия, с помощью которой можно объяснить все в этом мире с помощью чисел, формул, доказательств, теорем, а математик – это скорее не ученый, а творец подобный художнику, или музыканту, который пытается понять окружающий его мир.

С помощью математики можно представить себе удивительные вещи, которые невозможно проверить на практике, и для этого существует отдельная дисциплина – математическое моделирование. Математическое моделирование – наука, зародившаяся в середине XX века, с её помощью можно увидеть приближенное описание какого либо класса явлений или объекта. Основная цель математического моделирования – исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих исследований, по определению Алексея Александровича Ляпунова: «Моделирование – это опосредованное практическое или теоретическое исследования объекта, при котором непосредственно изучается не сам интересующий нас объект, а некоторая вспомогательная исскуственная или естественная система» т. е модель. Так с помощью математического моделирования была подтверждена теория о «ядерной зиме», в котором утверждалось что в результате существенного повышения количества отраженных солнечных лучей, вызванным взрывом менее половины ядерных боезарядов, температура на земле снизится до арктической.

В истории математики существует множество великих личностей, один из них – австрийский математик Курт Фридрих Гедель. Геделю принадлежат работы в области дифференциальной геометрии и теоретической физике, в частности, он написал работу по общей теории относительности, в которой предложил решение уравнений Эйнштейна, из которой следует, что строение вселенной может иметь такое устройство, в котором течение времени являеться закольцованным, что теоретически допускает путешествие во времени. Большенство современных физиков считают это решение верным лишь математически и не имеющим физического смысла. Но наше внимание привлекла его самая известная работа – теорема о неполноте.

Полнота системы аксиом, служащих основанием какой-либо области математики, означает адекватность этой аксиоматики той области, которая с их помощью задается, т.е. означает возможность доказать истинность или ложность любого осмысленного утверждения, содержащего понятия рассматриваемой области математики. В 1930-м годам были получены некоторые результаты о полноте различных аксиоматических систем. Так, Гильберт построил искусственную систему, охватывающую часть арифметики, и доказал ее полноту и непротиворечивость. Гёдель в своей диссертации доказал полноту исчисления предикатов первой ступени, и это дало надежду математикам на то, что им удастся доказать непротиворечивость и полноту всей математики. Однако уже в 1931 тот же Гёдель доказал теорему о неполноте, нанесшую сокрушительный удар по этим надеждам. Согласно этой теореме, любая процедура доказательства истинных утверждений элементарной теории чисел обречена на неполноту. Элементарная теория чисел — это раздел математики, занимающийся сложением и умножением целых чисел, и, как показал Гёдель, при любых осмысленных и практически применимых системах доказательств некоторые истины даже в такой весьма скромной области математики останутся недоказуемыми. Как следствие он получил, что внутренняя непротиворечивость любой математической теории не может быть доказана иначе, как с помощью обращения к другой теории, использующей более сильные допущения, а значит, менее надежной.

Методы, использованные Гёделем при доказательстве теоремы о неполноте, сыграли в дальнейшем важную роль в теории вычислительных машин. Гёдель внес важный вклад в теорию множеств. Два принципа — аксиома выбора и континуум-гипотеза — на протяжении десятилетий не поддавались доказательству, но интерес к ним не ослабевал: слишком привлекательны были их логические следствия. Гёдель доказал, что присоединение этих принципов к обычным аксиомам теории множеств не приводит к противоречию. Его рассуждения ценны не только теми результатами, которые они позволяют получить; Гёдель разработал конструкцию, которая улучшает понимание внутренних механизмов самой теории множеств.

Первая теорема Геделя о неполноте была представлена 23 октября 1930 года Венской академией наук Хансом Ханом, и опубликована в начале 1931 года, она была озаглавлена как «Теорема VI», в своей формулировке теоремы о неполноте Гедель использовал понятие ω-непротиворечивой формальной системы — более сильное условие, чем просто непротиворечивость, но именно более сильная версия теоремы о неполноте, которая не требует наличия свойства ω - непротиворечивости, сегодня известна как первая теорема Гёделя о неполноте. В оригинале теорема звучит так: «Для каждого ω - согласованного рекурсивного класса k формул существуют рекурсивные знаки r такие, что ни (vGenr), ни ¬(vGenr) не принадлежат Flg(k)». Обозначение Flg – это множество последовательностей, а Gen – это обобщение. Другими словами, высказывание Геделя G утверждает: «истинность G не может быть доказана». Если бы G можно было доказать в рамках теории, то в таком случае теория содержала бы теорему, которая противоречит сама себе, а потому теория была бы противоречива. Но если G недоказуемо, то оно истинно, а потому теория неполна. Первая теорема Геделя о неполноте показывает, что любая формальная система, в рамках которой можно определить натуральные числа, по необходимости неполна — она содержит высказывания, значения, истинности которых не могут быть вычислены. Другими словами, не существует замкнутой формальной системы, которая может определить натуральные числа, поскольку в ней будут содержаться истинные утверждения, истинность которых невозможно доказать в рамках формальной системы.

Вторая теорема Геделя о неполноте звучит следующим образом: Для любой формально рекурсивно перечислимой теории T, включая базовые арифметические истинностные высказывания и определённые высказывания о формальной доказуемости, данная теория T включает в себя утверждение о своей непротиворечивости тогда и только тогда, когда теория T противоречива. В оригинале вторая теорема о неполноте называлась «Теорема XI», в оригинале она звучала так: «Пусть k — произвольный рекурсивный непротиворечивый класс формул, тогда пропорциональная формула о том, что k — непротиворечив, не может быть доказана в рамках k. В частности, непротиворечивость P не может быть доказана в рамках P, принимая во внимание, что P —

непротиворечива». Р – Первая теорема о неполноте, является сокращением Геделя для арифметики Пеано.

Аксиоматическое построение геометрии произвело глубокое впечатление на мыслителей всех времен, так как совсем небольшого числа аксиом оказалось достаточно, чтобы из них можно было вывести огромное количество предложений. Более того, если каким-либо образом можно было удостовериться в истинности аксиом, а фактически на протяжении около двух тысячелетий большинство ученых считало истинность аксиом само собой разумеющейся, то это уже автоматически обеспечивало истинность всех теорем и их совместимость. Поэтому аксиоматическое изложение геометрии в глазах многих поколений ученых представлялось своего рода образцом идеального научного знания. Однако до недавнего времени геометрия в глазах большинства ученых представлялась, по сути дела, единственной областью математики, построенной на аксиоматической базе. Но в течение последних двух столетий аксиоматический метод стал применяться все более широко и интенсивно. Для новых областей математики и для более традиционных ее разделов, таких, как арифметика целых чисел, были сформулированы системы аксиом, представляющие эти математические дисциплины адекватным образом. В результате укоренилось довольно прочное убеждение, что для любой математической дисциплины можно указать перечень аксиом, достаточный для систематического построения всего множества истинных предложений данной науки. Работа Геделя показала полную несостоятельность такого убеждения. Она представила математикам поразительный и обескураживающий вывод, согласно которому возможности аксиоматического метода определенным образом ограничены, причем ограничения таковы, что даже обычная арифметика целых чисел может быть полностью аксиоматизирована. Более того, Гедель доказал, что для весьма широкого класса дедуктивных теорий (включающего, в частности, элементарную арифметику) нельзя доказать их непротиворечивость, если не воспользоваться в доказательстве столь сильными методами, что их собственная непротиворечивость оказывается еще в большей степени подвержена сомнениям, нежели непротиворечивость самой рассматриваемой теории. Отсюда можно сделать вывод, что ни о какой окончательной систематизации многих важнейших разделов математики не может быть и речи, и нельзя дать решительно никаких надежных гарантий того, что многие важные области математики полностью свободны от внутренних противоречий. Таким образом, открытия Геделя подорвали глубоко укоренившиеся представления и разрушили старые надежды. Вместе с тем работа Геделя обогатила исследования по основаниям математики совершенно новыми методами рассуждения. Открытия Геделя существенно расширили проблематику логических и математических исследований. Кроме того, работа Геделя обусловила существенную переоценку перспектив философии математики и философии как науки в целом.

Многие математики негативно реагируют на различные интерпретации теоремы Геделя, объясняя это тем, что это неправильно применять теорему Геделя в других сферах жизни кроме математики, например Дэбрей применяет ее политике, а многие европейские философы находят в теореме Геделя более глубокий мировоззренческий смысл, нежели многие математики. Но нельзя отрицать, что кроме несомненного высокого математического результата в этой теореме есть еще и мировоззренческий смысл, подтверждающий тезисы о том, что истина неабсолютная, что научные знания имеет непрерывное развитие, что творчество неограниченно