УДК 517.9

О ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В ДВУМЕРНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Кригер Е.Н.
Научный руководитель – к.ф.-м.н., доцент Фроленков И.В.

Сибирский федеральный университет

В работе доказано существование решения задачи идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении в случае данных Коши. Рассматриваемый коэффициент при функции источника представим в виде суммы или произведения двух функций, каждая из которых зависит от временной и одной пространственной переменных.

В области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) | 0 \le t \le T, (x,z) \in R^2\}$ рассмотрим задачу идентификации функции источника для параболического уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + f(t,x,z) \cdot \lambda(t,x,z), t \in (0,T), (x,z) \in R^2,$$

с начальным условием $u(0,x,z) = u_0(x,z)$.

Неизвестными в задаче являются функции $u(t,x,z), \lambda(t,x,z)$, где коэффициент при функции источника имеет вид $\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z)$ или $\lambda(t,x,z) = \lambda_3(t,x) \cdot \lambda_4(t,z)$.

Условия переопределения заданы на двух пересекающихся гиперплоскостях

$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x), u(t,\beta,z) = \psi(t,z),$$

где α, β – некоторые постоянные.

Считаем выполненными условия согласования:

$$u_0(x,\alpha) = \varphi(0,x), u_0(\beta,z) = \psi(0,z), \varphi(t,\beta) = \psi(t,\alpha),$$

и условия на входные данные:

$$\varphi_t(t,\beta) - \varphi_{xx}(t,\beta) - \psi_{zz}(t,\alpha) \ne 0, |f(t,\beta,z)| \ge \delta_1 > 0, \quad |f(t,x,\alpha)| \ge \delta_2 > 0, \quad \forall t \in [0,T], \forall (x,z) \in R^2,$$

где δ_1, δ_2 - некоторые постоянные.

Также относительно входных данных предположим, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение, и удовлетворяют ему.

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\varphi(t,x)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\psi(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}f(t,x,z)\right| \le C, k_1, k_2 = 0,1,\dots,6.$$

Рассмотрим первый случай, когда $\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z)$. Тогда неизвестный коэффициент при функции источника имеет вид

$$\lambda(t,x,z)=\frac{\psi_t(t,z)-\psi_{zz}(t,z)}{f(t,\beta,z)}+\frac{\varphi_t(t,x)-\varphi_{xx}(t,x)}{f(t,x,\alpha)}-\frac{\psi_t(t,\alpha)-\varphi_{xx}(t,\beta)-\psi_{zz}(t,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}-$$
$$-\frac{u_{xx}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)}-\frac{u_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}.$$

Подставим выражение на неизвестный коэффициент в исходное уравнение и перейдем к прямой задаче для уравнения

$$u_t=u_{xx}+u_{zz}+f(t,x,z)\cdot\left[-\frac{u_{xx}(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)}-\frac{u_{zz}(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}\right]+G(t,x,z),\quad t\in(0,T),(x,z)\in R^2,$$

с начальным условием $u(0,x,z)=u_0(x,z)$, здесь $G(t,x,z)$ - известная функция.

Для доказательства существования решения полученной прямой задачи используем метод слабой аппроксимации (далее МСА). Расщепим последнее уравнение на четыре дробных шага и сделаем сдвиг по времени на $\frac{\tau}{4}$ в следах неизвестных функций.

$$u_t^\tau=4\cdot\left(u_{xx}^\tau+u_{zz}^\tau\right), n\tau<t\le\left(n+\frac{1}{4}\right)\tau;$$
$$u_t^\tau=4\cdot u_{xx}^\tau\left(t-\frac{\tau}{4},\beta,z\right)\cdot\frac{f(t,x,z)}{f(t,\beta,z)},\left(n+\frac{1}{4}\right)\tau<t\le\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau;$$
$$u_t^\tau=4\cdot u_{zz}^\tau\left(t-\frac{\tau}{4},x,\alpha\right)\cdot\frac{f(t,x,z)}{f(t,x,\alpha)},\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau<t\le\left(n+\frac{3}{4}\right)\tau;$$
$$u_t^\tau=4\cdot G(t,x,z),\left(n+\frac{3}{4}\right)\tau<t\le(n+1)\tau,$$
$$u^\tau(0,x,z)=u_0(x,z),$$
$$n=0,1,2,\dots,(N-1),\ N\tau=T.$$

Для решения $u^\tau(t,x,z)$ данной расщепленной задачи получены равномерные по τ оценки:

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(t,x,z)\right|\le C,\quad k_1,k_2=0,1,\dots,6,\quad (t,x,z)\in G_{[0,T]},$$
$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_t^\tau(t,x,z)\right|\le C,\quad k_1,k_2=0,1,\dots,4,\quad (t,x,z)\in G_{[0,T]}.$$

Здесь и далее считаем, что $C>1$ – некоторые постоянные, вообще говоря, различные, зависящие от констант, ограничивающих входные данные, и независящие от параметра расщепления τ .

Приведенные выше оценки гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности. В силу теоремы Арцела, некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\tau(t,x,z)$ решений расщепленной задачи сходится вместе с производными по x и по z до четвертого порядка включительно к функции $u(t,x,z)\in C_{t,x,z}^{0,4,4}\left(G_{[0,T]}\right)$, которая в силу теоремы сходимости МСА является решением прямой задачи, причем $u(t,x,z)\in C^{1,4,4}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)$,

$$C^{1,4,4}_{t,x,z}\left(G_{[0,T]}\right)=\left\{u(t,x,z)\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}u,\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u\in C\left(G_{[0,T]}\right),k=0,1,k_1,k_2=0,1,\ldots,4\right.\right\}.$$

При этом справедливы следующие оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right|\le C,\quad k_1,k_2=0,1,\ldots,4,\quad (t,x,z)\in G_{[0,T]}.$$

Доказано выполнение условий переопределения. Следовательно, пара функций $u(t,x,z),\lambda(t,x,z)=\lambda_1(t,x)+\lambda_2(t,z)$ является решением обратной задачи.

Доказано существование единственного решения $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x,z)=\lambda_1(t,x)+\lambda_2(t,z)$ обратной задачи в классе $Z(T)=\left\{u(t,x,z),\lambda(t,x,z)\left|u\in C^{1,4,4}_{t,x,z}(G_{[0,T]}),\lambda(t,x,z)\in C^{1,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,T]})\right.\right\}$, удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right|+\sum_{k_1,k_2=0}^{2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\lambda(t,x,z)\right|\le C.$$

Также при $\lambda(t,x,z)=\lambda_1(t,x)+\lambda_2(t,z)$ доказана устойчивость решения обратной задачи по входным данным.

В случае, когда $\lambda(t,x,z)=\lambda_3(t,x)\cdot\lambda_4(t,z)$, выражение на неизвестный коэффициент имеет следующий вид

$$\lambda(t,x,z)=\frac{f(t,\beta,\alpha)}{f(t,\beta,z)\cdot f(t,x,\alpha)\cdot[\varphi_t(t,\beta)-\varphi_{xx}(t,\beta)-\psi_{zz}(t,\alpha)]}\cdot$$

$$\cdot\big(\ [\varphi_t(t,x)-\varphi_{xx}(t,x)]\cdot[\psi_t(t,z)-\psi_{zz}(t,z)]-u_{zz}(t,x,\alpha)\cdot[\psi_t(t,z)-\psi_{zz}(t,z)]-$$

$$-u_{xx}(t,\beta,z)\cdot[\varphi_t(t,x)-\varphi_{xx}(t,x)]+u_{xx}(t,\beta,z)\cdot u_{zz}(t,x,\alpha)\ \big).$$

Подставим выражение на неизвестный коэффициент в исходное уравнение и перейдем к прямой задаче для уравнения

$$u_t=u_{xx}+u_{zz}+M(t,x,z)\cdot u_{xx}(t,\beta,z)\cdot u_{zz}(t,x,\alpha)-M_1(t,x,z)\cdot u_{xx}(t,\beta,z)-$$
$$-M_2(t,x,z)\cdot u_{zz}(t,x,\alpha)+M_3(t,x,z),\quad t\in(0,T),(x,z)\in R^2,$$

с начальным условием $u(0,x,z)=u_0(x,z)$.

Функции $M(t,x,z),\ M_1(t,x,z),\ M_2(t,x,z),\ M_3(t,x,z)$ известны.

Для доказательства существования решения прямой задачи применим МСА. Расщепим последнее уравнение на три дробных шага и сделаем сдвиг по времени на $\frac{\tau}{3}$

в следах неизвестных функций.

$$u_t^\tau = 3\cdot\left(u_{xx}^\tau(t,x,z)+u_{zz}^\tau(t,x,z)\right),\ n\tau < t \le \left(n+\frac{1}{3}\right)\tau;$$

$$u_t^\tau = 3\cdot M(t,x,z)\cdot u_{xx}^\tau\left(t-\frac{\tau}{3},\beta,z\right)\cdot u_{zz}^\tau\left(t-\frac{\tau}{3},x,\alpha\right),\ \left(n+\frac{1}{3}\right)\tau < t \le \left(n+\frac{2}{3}\right)\tau;$$

$$u_t^\tau = -3\cdot\left(M_1(t,x,z)\cdot u_{xx}^\tau\left(t-\frac{\tau}{3},\beta,z\right)+M_2(t,x,z)\cdot u_{zz}^\tau\left(t-\frac{\tau}{3},x,\alpha\right)-M_3(t,x,z)\right),$$

$$\left(n+\frac{2}{3}\right)\tau < t \le (n+1)\tau,$$

$$u^\tau(0,x,z)=u_0(x,z),$$

$$n=0,1,2,\ldots,(N-1),\ N\tau=T.$$

Для решения $u^\tau(t,x,z)$ расщепленной задачи получены равномерные по τ оценки в малом временном интервале:

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u^\tau(t,x,z)\right|\le C,\quad k_1,k_2=0,1,\ldots,6,\quad (t,x,z)\in G_{[0,t_*]},$$

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u_t^\tau(t,x,z)\right|\le C,\quad k_1,k_2=0,1,\ldots,4,\quad (t,x,z)\in G_{[0,t_*]},$$

здесь t_* – константа, удовлетворяющая условию $0<t_*\le T$ и зависящая от констант, ограничивающих входные данные.

Данные оценки гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности. В силу теоремы Арцела, некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\tau(t,x,z)$ решений расщепленной задачи сходится вместе с производными по x и по z до четвертого порядка включительно к функции $u(t,x,z)\in C_{t,x,z}^{0,4,4}\left(G_{[0,t_*]}\right)$, которая в силу теоремы сходимости МСА является решением прямой задачи, причем $u(t,x,z)\in C_{t,x,z}^{1,4,4}\left(G_{[0,t_*]}\right)$. При этом справедливы следующие оценки $\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right|\le C,\quad k_1,k_2=0,1,\ldots,4,\quad (t,x,z)\in G_{[0,t_*]}$.

Доказано выполнение условий переопределения. Следовательно, пара функций $u(t,x,z),\lambda(t,x,z)=\lambda_3(t,x)\cdot\lambda_4(t,z)$ является решением обратной задачи.

Таким образом, при $\lambda(t,x,z)=\lambda_3(t,x)\cdot\lambda_4(t,z)$ доказана теорема существования решения $u(t,x,z),\ \lambda(t,x,z)$ обратной задачи в классе

$$Z(t_*)=\left\{u(t,x,z),\lambda(t,x,z)\,\middle|\,u\in C_{t,x,z}^{1,4,4}(G_{[0,t_*]}),\lambda(t,x,z)\in C_{t,x,z}^{1,2,2}(G_{[0,t_*]})\right\},$$

удовлетворяющего соотношению

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right|+\sum_{k_1,k_2=0}^{2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\lambda(t,x,z)\right|\le C.$$