УДК 539.3(075.8)

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА В НАПРЯЖЕНИЯХ.

Атургашева К.Ю.
научный руководитель – доцент Анферов П.И.

Сибирский федеральный университет

Для определения трехмерного напряженного состояния полого цилиндра известен ряд решений, использующих те или иные функции напряжений. В данной работе напряжения определяются непосредственно из основных дифференциальных уравнений теории упругости в цилиндрической системе координат.

Пусть бесконечный полый цилиндр $1 \leq r \leq R$ на части внешней поверхности нагружается поверхностной силой, имеющей составляющие $F_r(\theta, z), F_\theta(\theta, z), F_z(\theta, z)$.

Исходными соотношениями являются уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}&\sigma_{rr,r} + r^{-1}\sigma_{r\theta,\theta} + \sigma_{rz,z} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}),_r = 0,\\&\sigma_{r\theta,r} + r^{-1}\sigma_{\theta\theta,\theta} + \sigma_{\theta z,z} + 2r^{-1}\sigma_{\theta r} = 0,\\&\sigma_{rz,r} + r^{-1}\sigma_{\theta z,\theta} + \sigma_{zr,z} + r^{-1}\sigma_{rz} = 0.\end{aligned} \qquad (1)$$

Уравнения Бельтрами-Мичела:

$$\begin{aligned}&\nabla\sigma_{rr} - 4r^{-2}\sigma_{r\theta,\theta} - 2r^{-2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = -2\sigma_{,rr},\\&\nabla\sigma_{\theta\theta} + 4r^{-2}\sigma_{r\theta,\theta} + 2r^{-2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = -2r^{-1}\left(\sigma_{,r} + r^{-1}\sigma_{,\theta\theta}\right),\\&\nabla\sigma_{r\theta} + 2r^{-2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})_{,\theta} - 4r^{-2}\sigma_{r\theta} = -2r^{-2}\left(r\sigma_{,r\theta} - \sigma_{,\theta}\right),\\&\nabla\sigma_{\theta z} + 2r^{-2}\sigma_{rz,\theta} - r^{-2}\sigma_{\theta z} = -2r^{-1}\sigma_{,\theta z},\\&\nabla\sigma_{rz} - 2r^{-2}\sigma_{\theta z,\theta} - r^{-2}\sigma_{rz} = -2\sigma_{,rz},\\&\nabla\sigma_{zz} = -2\sigma,_{zz.}\end{aligned} \qquad (2)$$

Запятая на уровне индексов обозначает частное дифференцирование по координатам, указанным после нее.

Функция σ является гармонической:

$$\nabla\sigma = 0 \qquad (3)$$

Здесь обозначено:

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа,

$\sigma = 0{,}5(1+\mu)^{-1}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})$,

μ – коэффициент Пуассона.

Граничные условия для уравнений (1), (2) таковы:

$$\sigma_{rr}(1, \theta, z) = \sigma_{r\theta}(1, \theta, z) = \sigma_{rz}(1, \theta, z) = 0, \qquad (4)$$

$$\sigma_{rk}(R, \theta, z) = F_k(k, \theta, z),\ k = r, \theta, z. \qquad (5)$$

Напряжения σ_{jk}, найденные из уравнений Бельтрами-Мичела (2) должны тождественно удовлетворять уравнениям равновесия (1).Разлагая искомые функции σ_{jk} в ряды Фурье по координате θ и интегралы Фурье по координате z, представим их в виде

$$\sigma_{jk}(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\sigma}_{jk}(r, n, \omega)\, e^{i(n\theta + \omega z)}d\omega. \qquad (6)$$

Здесь чертой сверху обозначены двойные преобразования Фурье

$$\bar{\sigma}_{jk}(r,n,\omega)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_{jk}(r,\theta,z)\,e^{-i(n\theta+\omega z)}dzd\theta. \qquad (7)$$

Применим двойное преобразование Фурье (7) ко всем членам уравнений (1) – (3) и граничным условиям (4), (5), введем новую независимую переменную $\rho=\omega r$ и после преобразований получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $\bar{\sigma}_{jk}(\rho,n)$:

$$\rho\bar{\sigma}_{rr}^{'}+(\bar{\sigma}_{rr}-\bar{\sigma}_{\theta\theta})+i\bar{\sigma}_{rz}+in\bar{\sigma}_{r\theta}=0, \qquad (8)$$

$$i\rho\bar{\sigma}_{zz}+\rho\bar{\sigma}_{rz}^{'}+\bar{\sigma}_{rz}+in\rho\bar{\sigma}_{\theta z}=0, \qquad (9)$$

$$\rho\bar{\sigma}_{r\theta}^{'}-i\rho\bar{\sigma}_{\theta z}+2\bar{\sigma}_{r\theta}+in\bar{\sigma}_{\theta\theta}=0, \qquad (10)$$

$$\overline{\nabla}\bar{\sigma}_{rr}-4in\rho^{-2}\bar{\sigma}_{r\theta}-2\rho^{-2}(\bar{\sigma}_{rr}-\bar{\sigma}_{\theta\theta})=-2\bar{\sigma}^{''}, \qquad (11)$$

$$\overline{\nabla}\bar{\sigma}_{\theta\theta}+4in\rho^{-2}\bar{\sigma}_{r\theta}+2\rho^{-2}(\bar{\sigma}_{rr}-\bar{\sigma}_{\theta\theta})=-2\rho^{-1}\bar{\sigma}^{-1}+2n^{2}\bar{\rho}^{2}\bar{\sigma}, \qquad (12)$$

$$\overline{\nabla}\bar{\sigma}_{r\theta}+2\rho^{-2}(\bar{\sigma}_{rr}-\bar{\sigma}_{\theta\theta})-4\rho^{-2}\bar{\sigma}_{r\theta}=-2in(\rho^{-1}\bar{\sigma})^{'}, \qquad (13)$$

$$\overline{\nabla}\bar{\sigma}_{\theta z}+2in\rho^{-2}\bar{\sigma}_{rz}-\rho^{-2}\bar{\sigma}_{\theta z}=-2n\rho^{-1}\bar{\sigma}, \qquad (14)$$

$$\overline{\nabla}\bar{\sigma}_{rz}-2in\rho^{-2}\bar{\sigma}_{\theta z}-\rho^{-2}\bar{\sigma}_{rz}=-2i\bar{\sigma}, \qquad (15)$$

$$\overline{\nabla}\bar{\sigma}_{zz}=2\bar{\sigma}, \qquad (16)$$

$$\overline{\nabla}\bar{\sigma}=0. \qquad (17)$$

Здесь и далее штрихи означают дифференцирование по ρ.

$$\overline{\nabla}=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}-\left(\frac{n^2}{\rho^2}+1\right)$$

Граничные условия для (8) - (16):

$$\bar{\sigma}_{rr}(\omega,n)=\bar{\sigma}_{r\theta}(\omega,n)=\bar{\sigma}_{rz}(\omega,n)=0, \qquad (18)$$

$$\bar{\sigma}_{rk}(R\cdot\omega,n)=\bar{F}_{k}(n,\omega),\ k=r,\theta,z. \qquad (19)$$

Интегрирование системы уравнений (11) - (16) упрощается, если ввести новые неизвестные функции $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$ равенствами:

$$\sigma_1=\bar{\sigma}_{rr}-\bar{\sigma}_{\theta\theta}+2i\bar{\sigma}_{r\theta}, \qquad (20)$$

$$\sigma_2=\bar{\sigma}_{rr}-\bar{\sigma}_{\theta\theta}-2i\bar{\sigma}_{r\theta}, \qquad (21)$$

$$\sigma_3=\bar{\sigma}_{\theta z}+i\bar{\sigma}_{rz}, \qquad (22)$$

$$\sigma_4=\bar{\sigma}_{\theta z}-i\bar{\sigma}_{rz}. \qquad (23)$$

Через эти функции искомые преобразования Фурье напряжений выражаются формулами:

$$\bar{\sigma}_{rr}=\frac{1}{4}(\sigma_1+\sigma_2)+(1+\mu)\bar{\sigma}-\frac{1}{2}\bar{\sigma}_{zz}, \qquad (24)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}=\frac{1}{4}(\sigma_1+\sigma_2)-(1+\mu)\bar{\sigma}-\frac{1}{2}\bar{\sigma}_{zz}, \qquad (25)$$

$$\bar{\sigma}_{rz}=\frac{1}{2}(\sigma_3-\sigma_4), \qquad (26)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta z}=\frac{1}{2}(\sigma_3+\sigma_4), \qquad (27)$$

$$\bar{\sigma}_{r\theta}=\frac{1}{4i}(\sigma_1-\sigma_2). \qquad (28)$$

Общее решение уравнения (17) известно

$$\bar{\sigma}(\rho, n) = AI_n(\rho) + BK_n(\rho), \tag{29}$$

где $I_n(\rho)$,$K_n(\rho)$ – модифицированные функции Бесселя,
A, B – некоторые константы.

Подставим $\bar{\sigma}$ из (29) в правые части уравнений (11) - (16) и, комбинируя их в соответствии с выражениями (20) - (23) с учетом известных рекурентных соотношений для I_n,K_n, после преобразований получим:

$$\sigma_1{}'' + \rho^{-1}\sigma_1{}' - [1 + \rho^{-2}(n+2)^2]\sigma_1 = -2(AI_{n+2} + BK_{n+2}), \tag{30}$$

$$\sigma_2{}'' + \rho^{-1}\sigma_2{}' - [1 + \rho^{-2}(n-2)^2]\sigma_2 = -2(AI_{n-2} + BK_{n-2}), \tag{31}$$

$$\sigma_3{}'' + \rho^{-1}\sigma_3{}' - [1 + \rho^{-2}(n-1)^2]\sigma_3 = 2(AI_{n-1} - BK_{n-1}), \tag{32}$$

$$\sigma_4{}'' + \rho^{-1}\sigma_4{}' - [1 + \rho^{-2}(n+1)^2]\sigma_4 = -2(AI_{n+1} - BK_{n+1}), \tag{33}$$

$$\bar{\sigma}_{zz}{}'' + \rho^{-1}\bar{\sigma}_{zz}{}' - [1 + \rho^{-2}n^2]\bar{\sigma}_{zz} = 2(AI_n + BK_n). \tag{34}$$

Общие решения этих уравнений найдены методом вариации произвольных постоянных:

$$\sigma_1 = A_1 I_{n+2} + B_1 K_{n+2} + \frac{\rho}{2}[B(K_{n+1} + K_{n+3}) - A(I_{n+1} + I_{n+3})], \tag{35}$$

$$\sigma_2 = A_2 I_{n-2} + B_2 K_{n-2} + \frac{\rho}{2}[B(K_{n-1} + K_{n-3}) - A(I_{n-1} + I_{n-3})], \tag{36}$$

$$\sigma_3 = A_3 I_{n-1} + B_3 K_{n-1} + \frac{\rho}{2}[B(K_n + K_{n-2}) + A(I_n + I_{n-2})], \tag{37}$$

$$\sigma_4 = A_4 I_{n+1} + B_4 K_{n+1} - \frac{\rho}{2}[B(K_n + K_{n+2}) + A(I_n + I_{n+2})], \tag{38}$$

$$\sigma_{zz} = A_5 I_n + B_5 K_n + \frac{\rho}{2}[B(K_{n-1} + K_{n+1}) - A(I_{n-1} + I_{n+1})]. \tag{39}$$

Константы интегрирования в формулах (35) - (39) не могут быть все произвольными, так как величины $\bar{\sigma}_{jk}$, $j, k = r, \varphi, z$ должны тождественно удовлетворять уравнениям (8) - (10).

Введем выражения (29), (35) - (39) в формулы (24) - (28), а затем $\bar{\sigma}_{jk}$ в уравнения (8) - (10). После преобразований, которые опускаем, получаем три нулевых линейных комбинации для линейно независимых пар функций I_k,K_k, $k = n-1, n, n+1$. Из чего следуют шесть равенств для определения констант в (35) - (39):

$$\begin{aligned} &3A + A_2 + 2A_3 - A_5 = 0, && -B - B_2 + 2B_3 + B_5 = 0, \\ &3A + A_1 - 2A_4 - A_5 = 0, && -4B - B_4 + B_3 + 2B_5 = 0, \\ &A_4 - A_3 + 2A_5 = 0, && B - B_1 - 2B_4 + B_5 = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Еще шесть уравнений для этих констант получаются из граничных условий (18), (19) и равенств (24),(26), (28):

$$\sigma_1(\omega R) + \sigma_2(\omega R) + 4(1+\mu)\bar{\sigma}(\omega R) - 2\bar{\sigma}_{zz}(\omega R) = 4\bar{F}_r, \tag{44}$$

$$\sigma_1(\omega R) - \sigma_2(\omega R) = 4i\bar{F}_\theta, \tag{45}$$

$$\sigma_3(\omega R) - \sigma_4(\omega R) = 2i\bar{F}_z, \tag{46}$$

$$\sigma_1(\omega) + \sigma_2(\omega) + 4(1+\mu)\bar{\sigma}(\omega) - 2\bar{\sigma}_{zz}(\omega) = 0, \tag{47}$$

$$\sigma_1(\omega) - \sigma_2(\omega) = 0, \tag{48}$$

$$\sigma_3(\omega) - \sigma_4(\omega) = 0. \tag{49}$$

Решив систему уравнений (43) – (49), определим константы: A, B, A_i, B_i,
$i = 1,2, \dots ,5$. Вычисленные константы подставим в (35) – (38), а затем по выражениям (24) – (28) и (39) находим преобразования Фурье напряжений, что позволит осуществить обратные преобразования (6) и определить напряженное состояние цилиндра.