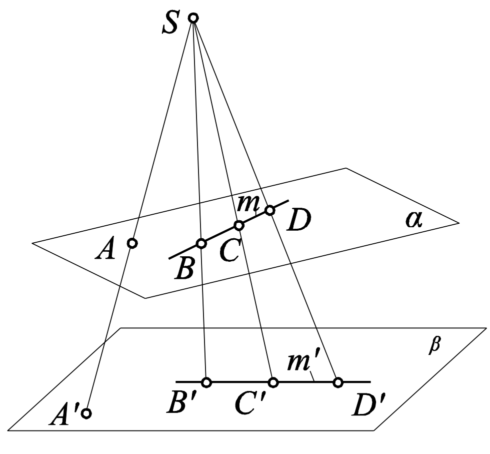
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГОМОЛОГИЧНОГО СООТВЕТСТВИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

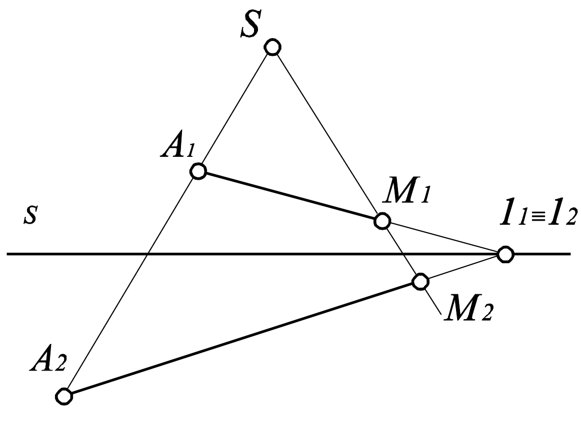
Каракулова Е.Е.,
научные руководители канд.техн. наук Супрун Л. И., доц. Супрун Е. Г.
Сибирский федеральный университет

Возьмём в пространстве два плоских поля α и β, а также точку *S*, не принадлежащую ни одному из полей (рис. 1, *а*). Через *S* и произвольную точку *A* поля α проведём проецирующий луч [*SA*). Он пересечёт β в точке A'. В результате такой операции точке *A* плоского поля α будет поставлена в соответствие точка A' поля β. И наоборот, точке A' соответствует точка *A*. Такое соответствие называется взаимно – однозначным. Записывается это так $A \leftrightarrow A'$. Точки *A* и A' называются соответственными. При таком проецировании прямой линии $m \to m'$, а $m' \to m$. Точкам $B, C, D \in m \to B'$, C', $D' \in m'$. Точки, лежащие на одной прямой, называются коллинеарными, а соответствие, при котором сохраняется коллинеарность точек, называется коллинеарным соответствием или *коллинеацией.*

Если такие поля совместить, то получим коллинеацию совмещённых полей. При этом может возникнуть частный вариант, когда соответственные прямые линии будут пересекаться в точках, лежащих на одной прямой, а соответственные точки лежать на лучах, проходящих через одну общую точку. Такое соответствие называется *гомологией.* Упомянутая выше прямая называется *осью гомологии*, а общая точка лучей – *центром гомологии*. Гомология может быть как пространственной, так и плоской. В пространстве осью гомологии является линия пересечения плоскостей. Центр гомологии совпадает с центром проецирования.



а



б

Рис. 1

Гомология вполне определена, если задан её центр, ось и пара соответственных точек. Имея такой набор, можно построить сколько угодно гомологичных пар точек. Так на рис. 1, *б* даны ось *s*, центр *S*, пара соответственных точек $A_1 \to A_2$ и точка M_1. Требуется построить $M_2 \to M_1$.

Построение. Проводим прямую A_1M_1 до пересечения её с осью s в двойной точке $1_1 \equiv 1_2$. Через двойную точку и A_2 проводим прямую, соответственную A_1M_1. Из центра S проводим луч $[SM_1)$. Искомая точка M_2 получится на пересечении построенной прямой с проведённым лучом.

Гомологичные соответствия возникают при решении многих задач начертательной геометрии, в которых фигурирует плоскость. Рассмотрим это на конкретных примерах.

Пример 1. Заданы три точки A', B', C', в которых плоскость общего положения пересекает рёбра AS, BS и CS пирамиды $SABCDE$. Достроить сечение (рис.2).

Пары точек A, A', B, B' и C, C' можно рассматривать как гомологично соответственные точки двух плоских полей: плоскости основания и секущей плоскости. Это соответствие установлено путём проецирования из вершины S пирамиды. Продлив стороны AB и $A'B'$, BC и $B'C'$ до взаимного пересечения, получим две двойные точки $K \equiv K'$ и $M \equiv M'$, через которые пройдёт линия пересечения плоскостей. Она является осью гомологии. Приёмом, показанным на рис. 1, *б*, находим $D' \to D$ и $E' \to E$. Получаем сечение $A'B'C'D'E' \to ABCDE$.

Пример 2. Достроить фронтальную проекцию сечения наклонного цилиндра плоскостью общего положения, если задана линия m пересечения секущей плоскости с плоскостью основания цилиндра и точка A_1' пересечения образующей l_1 цилиндра с секущей плоскостью (рис. 3).

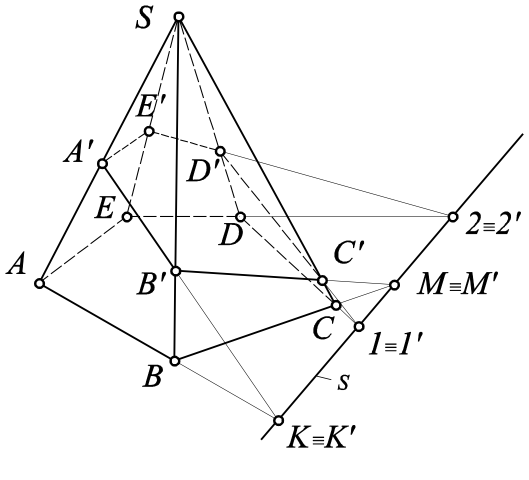


Рис. 2

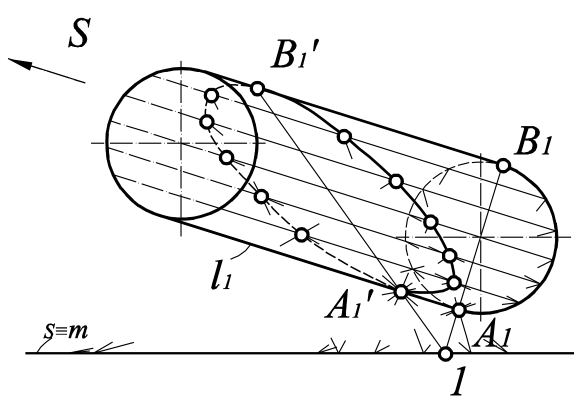


Рис. 3

Гомологичными будут фигура сечения и фигура того основания цилиндра, с плоскостью которого построена линия пересечения секущей плоскостью. Ось гомологии $s \equiv m$, центр S бесконечно удалён в направлении, параллельном образующим цилиндра. Парой соответственных точек является A_1' и точка A_1 основания, через которую проходит образующая l_1 цилиндра. Для построения сечения выбираем на основании любую точку, например B_1. Проводим A_1B_1 до пересечения с осью: $A_1B_1 \cap s = 1$. Соответственная прямая пройдёт через точки A_1' и 1. На пересечении этой прямой с образующей, проходящей через B_1, получаем $B_1' \to B_1$. Аналогичным образом строятся остальные точки. Причём для этой цели можно использовать любую уже построенную пару точек. Полученные точки последовательно соединяем с учётом их видимости.

Пример 3. Построить контур собственной тени сферы при стандартном освещении (рис.4).

При стандартном освещении проекция светового луча направлена под углом 45° к горизонтали. Контуром собственной тени сферы является эллипс, большая ось которого равна диаметру сферы и проходит через точки A и B касания световых лучей с её очерком. Эллипс и очерк сферы гомологичны. Осью гомологии является прямая линия, проходящая через A и B. Центр гомологии бесконечно удалён в направлении проекции источника освещения. Согласно закономерности контур собственной тени любой поверхности вращения на очерке и оси имеет точки одного уровня. Перенесём точку B по вертикали на горизонтальный диаметр. Получим точку C', принадлежащую эллипсу. Проведём через неё световой луч и отметим точку C пересечения луча с очерком сферы. Итак гомология установлена осью s, центром S и парой соответственных точек $C\to C'$. Берём любые точки очерка и строим им соответственные так, как показано на рис. 1, *б*.

Пример 4. Построить тени пересекающихся пластин ABC и DEF при факельном освещении, если задан источник освещения S и тень A' от вершины A на пластину DEF (рис. 5).

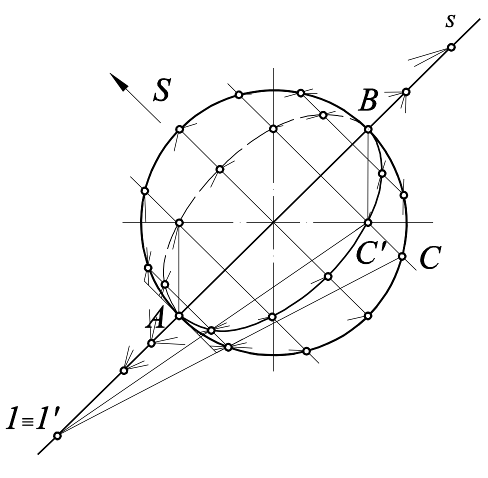


Рис. 4

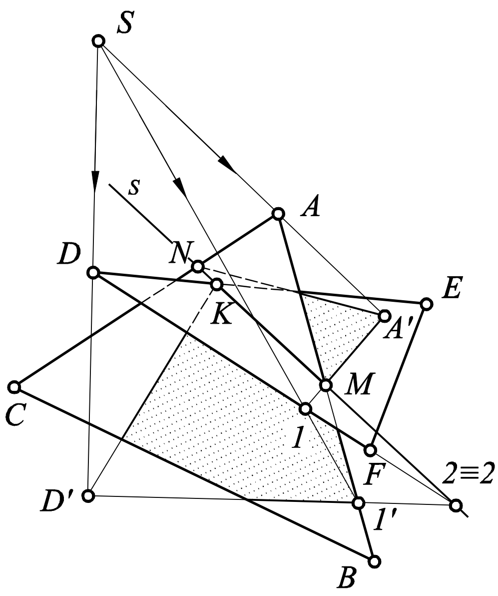


Рис. 5

Известно, что если прямая пересекает плоскость, то тень от прямой линии на эту плоскость проходит через точку их пересечения. Поэтому тень от пластины ABC на плоскость DEF пойдёт из A' в точки M и N.

Для построения тени от пластины DEF на плоскость ABC используем гомологию, ось s которой совпадает с линией KM пересечения пластин, центр S совпадает с источником освещения, пара соответственных точек $A\to A'$. В плоскости ABC построим прямую линию, соответственную DF. Продолжим прямую $A'M$ до пересечения с DF в точке 1: $A'M \cap DF=1$. Так как $A'M\to AB$, то на пересечении луча $[S1)$ с AB получаем $1'\to 1$. Прямая $DF\cap s=2\equiv 2'$. Прямая линия, соответственная DF, пройдёт через точки $2\equiv2'$ и $3'$. На пересечении луча $[SD)$ с построенной прямой линией получим $D'\to D$. Часть прямой линии $D'2'$, расположенная в пределах пластины ABC, представляет собой тень, падающую на неё от стороны DF. Соединив D' с точкой K, получим тень на ту же пластину от стороны DE.

Пример 5. Построить тени пирамиды и пересекающей её пластины при заданном параллельном освещении и тени t_D от вершины пирамиды на плоскость её основания (рис. 6).

В плоскостях пластины и основания пирамиды устанавливаются две гомологии с общей осью и двумя разными центрами. Центром одной из них является вершина пирамиды, центром другой – источник освещения. В первой гомологии соответственными точками являются $A\to A'$, $B\to B'$, $C\to C'$. Берём две пары соответственных прямых $AB\to A'B'$, $BC\to B'C'$ и продолжаем их до взаимного пересечения в двойных точках: $1\equiv1'$ и $2\equiv2'$. Через двойные точки проводим ось гомологии s. Построим пару соответственных точек во второй гомологии. Для этого проводим луч $[SD)$. Он пересекает плоскость основания в заданной точке t_D. Проводим прямую t_DA до пересечения с s в точке $3\equiv3'$. Соответственная ей прямая пройдёт через $3\equiv3'$ и A'. Отмечаем пересечение этой прямой с лучом $[SD)$. Получаем $t'_D\to t_D$. Тень от пирамиды на пластину пойдёт из точки t'_D в B' и C'. Тенью от пластины ELK на плоскость основания пирамиды будет соответственная ей фигура в гомологии, определённой построенной выше осью s, центром S и парой соответственных точек $t_D\to t'_D$. Строим $t_E\to E$, $t_L\to L$ и $t_K\to K$. Треугольник $t_Et_Lt_K$ – тень от пластины ELK на плоскость основания пирамиды $DABC$. В точках пересечения тени со стороной AB основания пирамиды тень преломится на её грань DAB. Она пойдёт в точки пересечения прямой $A'B'$ со сторонами пластины. Грань DBC пирамиды находится в собственной тени.

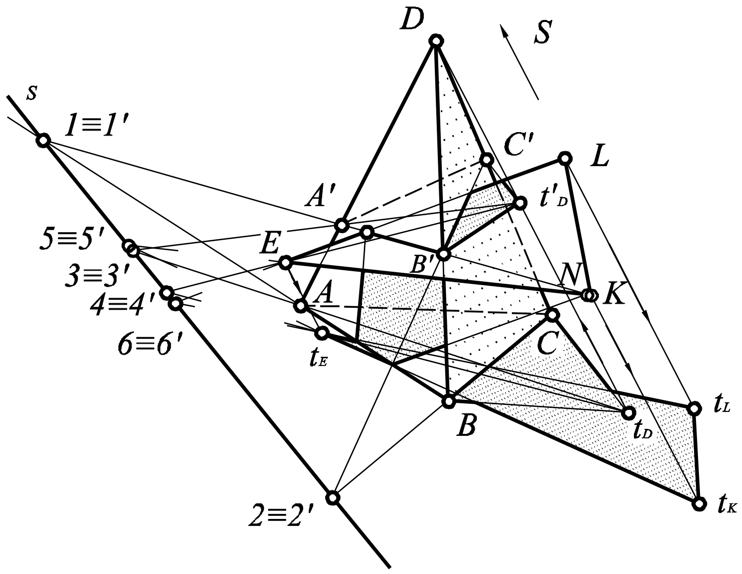


Рис. 6

Из рассмотренных примеров видно, что гомологичное соответствие позволяет выполнить требуемые построения по одной проекции, что даёт преимущество этому способу перед традиционными приёмами.