

**ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА ИНВОЛЮЦИЙ
ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП РАЗМЕРНОСТИ 2
НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ**

И.А.Тимофеев

Сибирский Федеральный Университет

Установлено, что группа $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ порождается тремя инволюциями и не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны.

Ключевые слова: кольцо целых гауссовых чисел, линейная группа, порождающие тройки инволюций.

Постановка задачи

Пусть $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ — группа всех обратимых матриц размерности 2 над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$, где i -корень из -1 , $SL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ — её подгруппа матриц с определителем 1, а $PGL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$, $PSL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ — их фактор-группы по центру соответственно. В данной статье для линейных групп размерности 2 над кольцом целых гауссовых чисел рассматриваются следующие задачи:

А) Порождается ли данная группа тремя инволюциями? $((2, 2, 2) - \text{порождаемость.})$

Б) Порождается ли данная группа тремя инволюциями, две из которых перестановочны? $((2 \times 2, 2) - \text{порождаемость.})$

1. Группа $SL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$

В группе $SL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ единственная инволюция

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

поэтому справедливо

Предложение 1.1. *Группа $SL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ не порождается никаким множеством инволюций.*

2. Группа $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$

В группе $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ у любой инволюции определитель может быть равен только ± 1 . Но в $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ есть матрица, определитель которой равен i , например,

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, справедливо

Предложение 2.1. *Группа $GL_2(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ не порождается никаким множеством инволюций.*

3. Группа $PGL_2(\square + \square i)$

В следующих предложениях для элементов группы $PGL_2(\square + \square i)$ используется матричная запись, при этом два элемента считаются равными, если они различаются лишь умножением на скалярную матрицу, (а нескаларная матрица является инволюцией, если её квадрат равен скалярной матрице).

Предложение 3.1 *Группа $PGL_2(\square + \square i)$ порождается тремя инволюциями*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 3.2. *Для любых трёх нецентральных элементов α, β, γ из $GL_2(\square)$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) $\alpha\beta = \beta\alpha$,

2) элементы $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ лежат в центре $GL_2(\square)$,

справедливо равенство

$$\alpha^{-1}\gamma\alpha = \beta^{-1}\gamma\beta. \quad (1)$$

Лемма 3.3. *Любая подгруппа M , порожденная тремя нецентральными инволюциями из группы $PGL_2(\square + \square i)$ над кольцом целых гауссовых чисел $\square + \square i$, две из которых перестановочны, имеет следующую структуру:*

$$M = \langle \gamma, \delta \rangle \cdot \langle \alpha, \beta \rangle, \quad (2)$$

где

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \delta^2 = (\alpha\beta)^2 = \alpha\gamma\alpha\delta = \beta\gamma\beta\delta = 1. \quad (3)$$

Более того, подгруппа $\langle \gamma, \delta \rangle \triangleleft M$ и группа M либо конечна, либо $M = \langle \gamma, \delta \rangle \times \langle \alpha, \beta \rangle$.

Предложение 3.4. *Группа $PGL_2(\square + \square i)$ не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

4. Группа $PSL_2(\square + \square i)$

Предложение 4.1. *Группа $PSL_2(\square + \square i)$ не порождается тремя инволюциями, две из*

которых перестановочны.

5. Заключение

Пусть G — одна из следующих групп:

$$GL_2(\square + \square i), PGL_2(\square + \square i), SL_2(\square + \square i), PSL_2(\square + \square i).$$

Тогда ответы на приведенные выше задачи для группы G указан в таблице 1, где "+" означает положительное решение, "-" - отрицательное решение, "?" - ответ неизвестен.

Таблица 1.

Задача	$GL_2(\square + \square i)$	$PGL_2(\square + \square i)$	$SL_2(\square + \square i)$	$PSL_2(\square + \square i)$
$(2, 2, 2)$	—	+	—	?
$(2 \times 2, 2)$	—	—	—	—

Библиографический список

[1] **Нужин Я.Н.** Порождающие тройки инволюций линейных групп размерности 2 над кольцом целых чисел / Я.Н. Нужин, И.А. Тимофеев - Владикавказский матем. журнал, 2009, 59–62 с.

[2] **Нужин Я.Н.** Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики p - Алгебра и логика, 1997, № 4, 422-440

Тимофеев Иван Алексеевич
Сибирский Федеральный Университет,
Студент 4 курса,
РОССИЯ, 660135, Красноярск, ул. Молокова 27, кв 181
E-mail: ivan.timofeev@gmail.com