УДК 512.554

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ АССОЦИАТИВНЫХ И АЛЬТЕРНАТИВНЫХ КОЛЕЦ

Чёрная М. Е.
научный руководитель канд. физ.-мат. наук Т. Ю. Войтенко
Лесосибирский педагогический институт – филиал
Сибирского федерального университета

Класс ассоциативных колец занимает важное место в теории колец и наиболее хорошо изучен, до 30-х годов XX столетия теория колец развивалась как теория ассоциативных колец. Однако в математике и её приложениях часто возникают и другие классы колец, в которых условие ассоциативности $(xy)z = x(yz)$ уже не всегда выполняется. Такие кольца называют *неассоциативными*. Примером такого кольца является алгебра октонионов или чисел Кэли, построенная в 1845 г. А. Кэли. Элементами этой алгебры являются всевозможные выражения вида $\alpha + \beta e$, где $\alpha = a + ib + jc + kd$ и β — кватернионы, а e — новая мнимая единица.

Первым классом неассоциативных алгебр явились алгебры Ли, впервые возникшие в теории групп Ли. Алгебра L называется *алгеброй Ли,* если ее операция умножения *антикоммутативна,* т.е.

$$x^2 = 0,$$

и удовлетворяет *тождеству Якоби*

$$J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y = 0.$$

Если A −ассоциативная алгебра, то алгебра $A^{(-)}$ получается введением на A нового умножения с помощью коммутатора

$$[x, y] = xy - yx .$$

Алгебра $A^{(-)}$ удовлетворяет тождеству Якоби и антикоммутативности, следовательно, является алгеброй Ли. Любая алгебра Ли над полем изоморфна подалгебре алгебры $A^{(-)}$ для подходящей ассоциативной алгебры A (теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта).

Алгебру, полученную введением на A умножения по правилу

$$x \circ y = xy + yx,$$

обозначают через $A^{(+)}$. Алгебра $A^{(+)}$ коммутативна и, вообще говоря, уже не ассоциативна, хотя и удовлетворяет следующему слабому условию ассоциативности:

$$x^2 \circ (y \circ x) = (x^2 \circ y) \circ x.$$

Алгебра называется *йордановой,* если она удовлетворяет тождествам

$$xy = yx,$$
$$x^2(yx) = (x^2y)x.$$

Алгебры вида $A^{(+)}$ для ассоциативной алгебры A и их подалгебры называются *специальными йордановыми.* Они уже не являются столь универсальными примерами йордановых алгебр, как алгебры $A^{(-)}$ и их подалгебры в случае алгебры Ли. Существуют йордановы алгебры (над любым полем), которые не изоморфны подалгебрам алгебры $A^{(+)}$ не для какой ассоциативной алгебры A. Такие алгебры называются *исключительными*.

Алгебра называется *альтернативной*, если в ней выполняются тождества

$$(xx)y = x(yx),$$
$$(yx)x = y(xx).$$

Первое из этих тождеств называется тождеством *левой альтернативности*, второе — тождеством *правой альтернативности*. Следствием этих двух тождеств является равенство

$$(xy)x = x(yx).$$

Существует теорема Артина, по которой в альтернативной алгебре любые два элемента порождают ассоциативную алгебру. Свое название альтернативные алгебры получили из-за того, что *ассоциатор* $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ является альтернативной функцией своих аргументов.

В произвольной альтернативной алгебре для любых x, y справедливо тождество

$$(x, y, x) = 0,$$

которое называется *законом эластичности*. Алгебры, удовлетворяющие этому тождеству, называются *эластичными*. Всякая коммутативная, либо антикоммутативная алгебра эластична.

Если A — альтернативная неассоциативная алгебра, то присоединенная алгебра $A^{(+)}$ по-прежнему является йордановой (и даже специальной) алгеброй, в то время как коммутаторная алгебра $A^{(-)}$ уже не является алгеброй Ли. Тем не менее можно показать, что в этом случае алгебра $A^{(-)}$ удовлетворяет следующему тождеству — тождеству Мальцева:

$$J(x, y, xz) = J(x, y, z)x,$$

где $J(x, y, z)$ — якобиян элементов x, y, z.

Антикоммутативная алгебра называется *алгеброй Мальцева*, если она удовлетворяет тождеству Мальцева. Поскольку в алгебрах Ли якобиан тождественно равен нулю, то всякая алгебра Ли есть алгебра Мальцева. С другой стороны, всякая двупорожденная алгебра Мальцева является лиевой.

Алгебры Ли, йордановы алгебры, альтернативные алгебры и алгебры Мальцева являются основными и наиболее изученными классами неассоциативных алгебр.

Обобщением альтернативных алгебр являются так называемые *слабоальтернативные алгебры*. Эти алгебры, удовлетворяют ассоциаторному тождеству

$$(x, y, z) = (y, z, x).$$

Пусть A — слабоальтернативное кольцо (алгебра) без элементов порядков 2 и 3 в аддитивной группе. Несложно проверяется, что если A удовлетворяет также тождеству ассоциативности третьих степеней

$$(x, x, x) = 0,$$

то оно альтернативно. Класс слабоальтернативных колец является нетривиальным расширением класса всех альтернативных колец.

П. Йордан установил, что в A выполняется тождество $(x, x, x)^2 = 0$. Известно также, что если из условия $a^2 = 0$ следует, что $a = 0$ для любого $a \in A$, то A альтернативно. Кроме того, в A справедливо тождество $(x, y, x)^2 = 0$. Отсюда следует

Предложение 1. *Слабоальтернативные алгебры не являются эластичными.*

Было также показано:

a) если A простое, то оно альтернативно (Д. Ауткольт);

b) если A полупервичное, то оно альтернативно (Н. Стерлинг);

c) в A выполняются тождества $\big((y, x, x), x, x\big) = 0$ и $(y, x, x)(z, x, x) = 0$ (Э. Клейнфелд и Л. Видмер);

d) в A квадрат альтернаторного идеала равен нулю (Р. Х. Вахитов). (*Альтернаторным* называется идеал, порожденный всевозможными ассоциаторами $(x, x, y), (x, y, x), (y, x, x)$; очевидно, что в A они равны друг другу).

Если A слабоальтернативная алгебра, то справедливо

Предложение 2. *Присоединенная алгебра $A^{(+)}$ слабоальтернативной алгебры A является йордановой при условии ассоциативности третьих степеней $(x, x, x) = 0$.*