УДК 512.5

МАКСИМАЛЬНЫЕ КОММУТАТИВНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ В НЕКОТОРЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

Кравцова Е. А.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук Левчук В. М.
Сибирский федеральный университет

Пусть Φ – некоторая система корней евклидова пространства, Π – её база, Φ^+ - положительная система корней, $p(\Phi) = max\{(r,r)/(s,s)\ |r,s \in \Phi^+\}$.

Алгебра Шевалле типа Φ над полем K характеризуется базисом Шевалле $\{e_r(r \in \Phi^+), h_s(s \in \Pi)\}$.Еёподалгебру с базисом $\{e_r(r \in \Phi^+)\}$ будем обозначать $N\Phi(K)$.

Целью данного исследования является описание максимальных коммутативных идеалов и максимальных коммутативных подалгебр алгебры $N\Phi(K)$.

Для алгебры Ли $L = N\Phi(K)$*стандартным* называют центральный ряд

$$L = L_1 \supseteq L_2 \supseteq \cdots \supseteq L_h = 0, \qquad L_i = \langle K \cdot e_r | r \in \Phi^+, ht(r) \geq i \rangle,$$

где h - число Кокстера. Напомним, что н*ижним центральным рядом*алгебры ЛиL называют последовательность

$$L = \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \cdots \supseteq \Gamma_n \supseteq \cdots,$$

где $\Gamma_{k+1} = [\Gamma_k, L]$для всех $k > 1$, а *верхним центральным рядом*алгебры ЛиLназывают последовательность

$$E = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \cdots \subseteq Z_n \subseteq \cdots,$$

гдеZ_1 есть центр алгебрыL, аZ_{k+1} есть центр алгебрыL по модулю Z_kдля всех $k > 1$.

Теорема 1.Если*p(Φ)!K=K,* то верхний центральный ряд и нижний центральный ряд алгебры Ли*L=NΦ(K)* совпадают со стандартным центральным рядом.

Замечание. Ограничение, наложенное на поле K в условиях теоремы, является существенным. Так,для типа G_2 гиперцентральный ряд при $3K = 0$имеет вид:

$$Z_0 = 0 \subseteq L_5 + Ke_{2a+b} \subseteq L_2 \subseteq L_1 = NG_2(K),$$

при$2K = 0$:

$$Z_0 = 0 \subseteq L_5 \subseteq L_4 \subseteq L_2 \subseteq L_1 = NG_2(K).$$

Предложение 1. Если$\Phi \neq A_n$ и $p(\Phi)!K = K$, то в алгебре$L = N\Phi(K)$ идеал $L_{h/2}$будет максимальнымкоммутативным.

При исследовании коммутативных подалгебр используется метод из статьи А. И. Мальцева («Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли», 1945 г.) – сведение перечисления всех коммутативных подалгебр наибольшей размерности к перечислению наибольших коммутативных множеств корней в Φ^+.

В ходе работы было получено полное описание максимальных коммутативных идеалов для типа G_2.

Предложение 2. При $6K = K$ любой идеал в $NG_2(K)$ инцидентен с каждым гиперцентром.

Теорема 2.Максимальный коммутативный идеал алгебры $NG_2(K)$ при $6K = K$ совпадает с L_3, при $3K = 0$ совпадает с L_2 или $K(e_b + de_{b+3a}) + Ke_{b+a} + Z_1$, при $2K = 0$ совпадает сL_3или $K(e_{b+a} + de_{b+2a}) + L_4$.

Исследуется также следующая

Гипотеза. Максимальные коммутативные подалгебрыалгебры $N\Phi(K)$ могут быть получены автоморфизмами из Aut($N\Phi(K)$) и сопряжениямив алгебре Шевалле из максимальных коммутативных идеалов (возможны исключения).