УДК 519.145

ПОЛУПОЛЕВЫЕ ПЛОСКОСТИ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Панов С. В.,
Научные руководители: канд. физ.-мат. наук Кравцова О. В.,
доктор физ.-мат. наук Левчук В. М.
Институт Математики Сибирского Федерального Университета

Работа посвящена вопросу построения полуполевых плоскостей нечетного порядка и гипотезе о разрешимости группы коллинеаций таких плоскостей.

Вначале введем необходимые определения.

Определение 1. *Проективной плоскостью* назовем структуру $\pi = \langle P, L, I \rangle$, состоящую из двух непустых множеств (множества точек P и множества прямых L) с отношением инцидентности I между ними таким, что выполняются три условия:

1) любые две различные прямые l и m инцидентны единственной точке;
2) любые две различные точки A и B инцидентны единственной прямой;
3) найдутся такие четыре точки, что никакие 3 из них не лежат на одной прямой.

Определение 2. *Порядком* проективной плоскости называется такое число n, что:

1) плоскость содержит $n^2 + n + 1$ точку, столько же прямых;
2) каждая прямая инцидентна с $n + 1$ точками;
3) каждая точка инцидентна с $n + 1$ прямыми.

На любой проективной плоскости можно ввести координаты, используя элементы некоторого (координатизирующего) множества W. См. Hughes D. R., Piper F. C. (Springer - Verlag: New-York, 1973.) и др. Его алгебраические свойства определяют геометрические свойства плоскости и строение полной группы автоморфизмов.

Определение 3. *Квазиполем* называют непустое множество Q с двумя бинарными операциями - сложением $+$ и умножением $\cdot$, причем выполняется левый дистрибутивный закон, $\langle Q, + \rangle$ - группа, $Q^* = Q \backslash \{0\}$ по умножению есть *лупа* (то есть группа без условия ассоциативности), $0 \cdot x = 0$ для всех $x \in Q$, и уравнение $a \cdot x = b \cdot x + c$ имеет единственное решение x для всех $a, b, c \in Q$, $a \neq b$. Квазиполе с правой и левой дистрибутивностью называют также *полуполем*.

Если координатизирующее множество является полуполем, то соответствующая плоскость называется полуполевой. Ее задают при помощи линейного пространства и множества R (*регулярное множество* плоскости), состоящего из $n \times n$ матриц $\theta(u)$ $(u \in W)$ над простым полем $GF(p)$ с условиями:

1) R содержит нулевую и единичную матрицу,
2) все матрицы из R, кроме нулевой – невырожденные, причем, $\det(\theta_1(u) - \theta_2(u)) \neq 0$, *для* $\forall\, \theta_1(u) \neq \theta_2(u)$.

Доказано, что регулярное множество полуполевой плоскости ранга 3 над простым полем $GF(p)$ состоит из матриц вида

$$\Theta(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ b_{21}y + c_{21}z & x + b_{22}y + c_{22}z & b_{23}y + c_{23}z \\ b_{31}y + c_{31}z & b_{32}y + c_{32}z & x + b_{33}y + c_{33}z \end{pmatrix}, \qquad (x, y, z \in GF(p)).$$

Перечисление матрицы из R для $p = 3$ дает $|R|$ = 2016 плоскостей ранга 3.

Если регулярное множество $R = \{\Theta(x, y, z) | \; x, y, z \in GF(3)\}$ проективной плоскости является полем, то соответствующая плоскость называется дезарговой. Оказывается, что из построенных 2016 плоскостей дезарговыми являются 144.

Определение 4. *Изоморфизмом* проективной плоскости π_1 на проективную плоскость π_2 называется взаимно однозначное отображение точек плоскости π_1 в точки плоскости π_2, прямых плоскости π_1 – в прямые плоскости π_2, сохраняющее отношение инцидентности.

Отношение изоморфности плоскостей и его связь с регулярными множествами изучались в работах: Hughes - Piper, Подуфалова (Podufalov N. D., Contemp. Math. 1992. (Part 1). V. 131. P.697-705.) и др. В общем случае изоморфизм полуполевых плоскостей задается полулинейным преобразованием векторного пространства: $x \to x^{\varphi}A$, где φ – автоморфизм поля $GF(p)$, A – квадратная матрица над $GF(p)$. Известно, что линейный изоморфизм полуполевых плоскостей достаточно рассматривать только в виде $(x_1, x_2) \to (x_1, x_2)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, то есть матрица преобразования – блочно-диагональная.

Для построенных плоскостей основное поле является простым. Поэтому $\varphi \equiv 1$ и изоморфизм задается линейным преобразованием, $x \to xA$.

Далее исследовался вопрос о попарной изоморфности построенных полуполевых плоскостей порядка 27. Доказано, что они разбиваются на два класса: 144 (попарно) изоморфных дезарговых плоскостей и 1872 изоморфных недезарговых плоскостей. Таким образом, установлена

Теорема 1. С точностью до изоморфизма, существует ровно две полуполевые плоскости ранга 3 над $GF(3)$, одна из которых дезаргова, а другая - недезаргова.

Для найденных плоскостей исследовалась структура ее группы автоморфизмов и гипотеза о разрешимости группы коллинеаций недезарговых полуполевых плоскостей (а для дезарговых плоскостей эта группа всегда неразрешима (Hughes - Pipper)); к настоящему времени гипотеза подтверждена лишь для отдельных плоскостей. Разрешимость полной группы коллинеаций равносильна разрешимости группы автотопизмов (Hughes - Pipper). Напомним, что *автотопизмом* полуполевой плоскости называется коллинеация, фиксирующая точки $(0,0)$, (0), (∞) и прямые $[0,0]$, $[0]$, $[\infty]$.

Доказано, что все автоморфизмы полуполевой плоскости из *теоремы 1* образуют группу автотопизмов, действующих как блочно-диагональные матрицы вида $\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Для дезарговой плоскости порядок группы автотопизмов равен 2028, а для недезарговой - 156. Отсюда вытекает

Теорема 2. Полная группа коллинеаций недезарговой полуполевой плоскости порядка 27 разрешима.