УДК 512.542

КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ НЕКОТОРЫХ ГРУПП

Юркина В. Е.
научный руководитель канд. физ.-мат. наук Т. Ю. Войтенко
Лесосибирский педагогический институт – филиал Сибирского федерального университета

Исследование конечных групп, в которых определенные системы подгрупп обладают некоторыми теоретико-групповыми свойствами, является одним из основных направлений в теории групп.

Говорят, что подгруппа H группы G называется *квазинормальной* в G, если H перестановочна со всеми подгруппами группы G, то есть $HB = BH$ для любой подгруппы B из G.

Очевидно, что нормальные подгруппы квазинормальны, но обратное, вообще говоря, неверно. Известно, лишь то, что максимальная квазинормальная подгруппа всегда нормальна.

Кроме того, подгруппа, порожденная квазинормальными подгруппами, есть квазинормальная подгруппа. Если H квазинормальная подгруппа, то все подгруппы, сопряженные с H, также квазинормальны. С другой стороны, о минимальных квазинормальных подгруппах мало что известно. В этой связи можно упомянуть результат К. Накамура: *если G конечная -группа вида $G = A\langle g\rangle$, где $A -$ нетривиальная квазинормальная подгруппа G. Тогда существует квазинормальная подгруппа группы G порядка p, лежащая в центре A.*

Вопрос о необходимости условия $G = A\langle g\rangle$ является сложным. Известно, что когда A циклическая, то каждая подгруппа A также квазинормальна в G. В то же время, когда A элементарная абелева ничего не известно, даже когда A ранга два. Доказана

Теорема 1 (Дж. Коссей, С. Стоунхевер, Д. Закер). *Пусть $p > 2$ и A квазинормальная подгруппа порядка p^2 в конечной -группы G. Тогда в G существует квазинормальная подгруппа порядка p, лежащая в A.*

Напомним, что группа называется *квазигамилъτоновой* (или *квазиабелевой*), если все ее подгруппы квазинормальны.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 (М. Судзуки). Конечная группа квазигамильтонова тогда и только тогда, когда она нильпотентна и ее силовские подгруппы имеют модулярные групповые структуры.

Подгруппа H называется *абнормальной* подгруппой группы G, если $g \in \langle H, H^g\rangle$ для любого элемента $g \in G$. Обозначается: $H >\!\lhd G$. Конечная группа G называется -*группой*, если каждая примарная подгруппа G нормальна или абнормальна в G. Примером B-группы является группа порядка pq, где p, $q -$ простые числа.

Исследуем вопрос об описании квазинормальных подгрупп в группах порядков pq, p^2, p^3.

В группе G порядка pq, отличной от циклической, не все группы являются квазинормальными. Например, в симметрической группе S_3 одна нормальная подгруппа порядка 3: $\langle(1\ 2\ 3)\rangle_3$ и три подгруппы порядка 2: $\langle(1\ 2)\rangle_2$, $\langle(1\ 3)\rangle_2$, $\langle(2\ 3)\rangle_2$, которые не перестановочны между собой, поскольку $\langle(1\ 2)\rangle_2\ \langle(2\ 3)\rangle_2 \neq \langle(2\ 3)\rangle_2\ \langle(1\ 2)\rangle_2$.

Очевидно, что подгруппа порядка p^2 является квазигамильтоновой. В неабелевой группе G порядка p^3 при $p > 2$ существует квазинормальная подгруппа порядка p, лежащая в $A = \langle a \rangle_{p^2}$, как это следует из теоремы 1. При $p = 2$ неабелева группа G изоморфна либо группе кватернионов Q_8, либо группе диэдра $D_4 = \langle a, b \mid a^4 = e,\ b^2 = e,\ ba = a^{-1}b \rangle$. Известно, что группа Q_8 не являясь абелевой, тем не менее обладает свойством, что каждая ее подгруппа является нормальной, а значит и квазинормальной. Группа D_4 обладает единственной циклической подгруппой, которая нормальна в D_4, и шестью подгруппами порядка 2: $\langle a \rangle_2$, $\langle b \rangle_2$, $\langle ab \rangle_2$, $\langle ba \rangle_2$, $\langle a^2 b \rangle_2$, $\langle a^2 \rangle_2$. Последняя подгруппа является центральной и поэтому перестановочна с любой подгруппой группы D_4. Для остальных будем иметь:

$$\langle a \rangle_2 \langle b \rangle_2 = \{e, a, b, ab\} \neq \{e, a, b, ba\} = \langle b \rangle_2 \langle a \rangle_2,$$
$$\langle ab \rangle_2 \langle b \rangle_2 = \{e, b, ab, a\} \neq \{e, b, ab, a^3\} = \langle b \rangle_2 \langle ab \rangle_2,$$
$$\langle ba \rangle_2 \langle a \rangle_2 = \{e, a, ba, ba^2\} \neq \{e, a, ba, b\} = \langle a \rangle_2 \langle ba \rangle_2,$$
$$\langle a^2 b \rangle_2 \langle a \rangle_2 = \{e, a, a^2 b, ab\} \neq \{e, a, a^2 b, ba\} = \langle a \rangle_2 \langle a^2 b \rangle_2.$$