УДК 517.9

О ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА ОДНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Даржаа М. А.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук Фроленков И. В.
Сибирский Федеральный Университет

В работе Ю.Я. Белова и К.В. Коршуна “О задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса” исследована разрешимость обратной задачи с неизвестным коэффициентом при функции источника. Уравнение содержит квазилинейный член вида $u(t,x)u_x(t,x)$.

В данной работе получено обобщение на случай квазилинейного уравнения, содержащего нелинейность достаточно общего вида. Получены достаточные условия существования решения. При помощи условий согласования обратная задача сводится к некоторой вспомогательной прямой задаче для нелинейного нагруженного уравнения. Для доказательства разрешимости прямой задачи используется метод слабой аппроксимации.

В области $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x) | 0 < t < T, x \in E_1\}$ рассматривается задача Коши

$$u_t(t,x) = u_{xx} + M\big(t, u(t,x)\big)u_x(t,x) + \lambda(t)f(t,x),$$

$$u(0,x) = u_0(x).$$

Коэффициент $\lambda(t)$ подлежит определению одновременно с решением задачи $u(t,x)$, удовлетворяющим условию переопределения

$$u(t,0) = \varphi(t).$$

и условию согласования

$$\varphi(0) = u_0(0).$$

Здесь $M(t,y)$ - это достаточно гладкая функция, имеющая все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение, и удовлетворяющая

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k} M(t,y)\right| \le M_0(1+|y|^p),\ k = 0,\dots,6,$$

где p – фиксированное натуральное число.

Пусть входные данные также имеют все нужные непрерывные производные и удовлетворяют соотношению:

$$|f(t,0)| \ge \delta > 0,\ |\varphi(t)| + |\varphi'(t)| + \sum_{k=0}^{6} \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(t,x)\right| + \sum_{k=0}^{6} \left|\frac{d^k}{dx^k} u_0(x)\right| \le C.$$

Подставляя условие переопределения в исходное параболическое уравнение, получим

$$\varphi'(t) = u_{xx}(t,0) + M\big(t, \varphi(t)\big)u_x(t,0) + \lambda(t)f(t,0).$$

Откуда находим неизвестный коэффициент:

$$\lambda(t) = \frac{\varphi'(t) - u_{xx}(t,0) - M\big(t,\varphi(t)\big)u_x(t,0)}{f(t,0)}.$$

Подставляя $\lambda(t)$ в исходную прямую задачу, получим

$$u_t(t,x) = u_{xx} + M\big(t,u(t,x)\big)u_x(t,x) + \frac{\varphi'(t) - u_{xx}(t,0) - M\big(t,\varphi(t)\big)u_x(t,0)}{f(t,0)} f(t,x),$$

$$u(0,x) = u_0(x).$$

Расщепим и линеаризуем задачу сдвигом по времени на $(t - \frac{\tau}{3})$ на втором и третьем дробных шагах в нелинейных членах и членах, содержащих следы неизвестных функций

$$u_t^\tau = 3u_{xx}^\tau(t,x),\ t \in \left(n\tau, \left(n + \tfrac{1}{3}\right)\tau\right],$$

$$u_t^\tau = 3\,\frac{\varphi'(t) - u_{xx}^\tau\left(t - \frac{\tau}{3}, 0\right) - M\big(t,\varphi(t)\big)u_x^\tau\left(t - \frac{\tau}{3}, 0\right)}{f(t,0)} f(t,x), t \in \left(\left(n + \tfrac{1}{3}\right)\tau, \left(n + \tfrac{2}{3}\right)\tau\right],$$

$$u_t^\tau = 3M(t, u^\tau(t - \tfrac{\tau}{3}, x))u_x^\tau(t,x),\ t \in \left(\left(n + \tfrac{2}{3}\right)\tau, (n+1)\tau\right],$$

$$u^\tau(0,x) = u_0(x).$$

На первом дробном шаге мы получаем оценки в силу принципа максимума для параболического уравнения. На втором дробном шаге решается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. На третьем дробном шаге рассматривается задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка.

Существует такая постоянная $t^* \in (0,T]$, зависящая от констант, ограничивающих входные данные, и не зависящая от τ, что при $(t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}$ получаем равномерную по τ оценку

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} u^\tau(t,x)\right| \le C.$$

Из полученных оценок следует равномерная по τ ограниченность производных

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^j u^\tau}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^j u^\tau}{\partial x^j}, \qquad j = 0..4,$$

которой достаточно для равностепенной непрерывности в $\Pi_{[0,t^*]}^N = \{(t,x), t \in [0,t^*], |x| < N\}$ множеств функций $\{u^\tau\}$, $\{u_x^\tau\}$, $\{u_{xx}^\tau\}$, $\{u_{xxx}^\tau\}$, $\{u_{xxxx}^\tau\}$.

По теореме Арцела, существует последовательность u^{τ_k}, сходящаяся в $\Pi_{[0,t^*]}^N$ вместе со своими производными до четвертого порядка включительно к некоторой функции $u(t,x)$. По теореме сходимости метода слабой аппроксимации, функция $u(t,x) = \lim_{k\to\infty} u^{\tau_k}(t,x)$, принадлежащая классу

$$C_{t,x}^{1,4}(\Pi_{[0,t^*]}^N) = \left\{u(t,x) \mid \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t,x) \in C\big(\Pi_{[0,t^*]}^N\big), k = 0,1,\dots,4\right\},$$

является решением прямой задачи

Для найденной функции $u(\boldsymbol{t}, x)$ доказано выполнение условий переопределения. Зная $u(\boldsymbol{t}, x)$ мы можем найти $\lambda(\boldsymbol{t})$.

Доказана

Теорема

Пусть выполняются все указанные выше условия на входные данные. Тогда существует постоянная $0 < \boldsymbol{t}^* \leq T$, зависящая от констант, ограничивающих входные данные, такая, что решение $u(\boldsymbol{t}, x)$, $\lambda(\boldsymbol{t})$ исходной обратной задачи Коши существует в классе

$$Z(\boldsymbol{t}^*) = \{u(\boldsymbol{t}, x), \lambda(\boldsymbol{t}) | u(\boldsymbol{t}, x) \in C^{1,4}_{t,x}\left(\Pi_{[0,t^*]}\right),\ \lambda(\boldsymbol{t}) \in C([0, \boldsymbol{t}^*])\}.$$

и удовлетворяет условиям

$$\sum_{j=0}^{4} \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} u\right| \leq C, |\lambda(\boldsymbol{t})| \leq C.$$

Список литературы

1. A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York, Marcel Dekkar, inc., 1999.
2. Н. Н. Яненко. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Изд-во «Наука» - сибирское отделение, Новосибирск, 1967.
3. Белов Ю. Я., Кантор С. А. Метод слабой аппроксимации / КрасГУ, Красноярск, 1999.
4. Belov Yu. Ya. Inverse problems for partial differential equations. Utrecht etc.: VSP 2002.
5. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. – М.: Наука, 1966.
6. Треногин В. А. Функциональный анализ / М.: Наука, 1980.