УДК 532.5.013

# ОБ ОДНОНАПРАВЛЕННОМ ДВИЖЕНИИ ТРЁХ ВЯЗКИХ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ


**Лемешкова Е. Н.**

**научный руководитель д-р физ.-мат. наук Андреев В. К.**

***Институт математики СФУ***


При рассмотрении однонаправленного движения трёх несмешивающихся несжимаемых вязких теплопроводных жидкостей в плоских слоях $-l_1 < y < 0$, $0 < y < l_2, l_2 < y < l_3$ с общими границами раздела $y = 0, y = l_2$ и твёрдыми стенками $y = -l_1, y = l_3$ возникает следующая начально-краевая задача для системы параболических уравнений:

$$u_{jt} = \nu_j u_{jyy}, \tag{1}$$

$$T_{jt} = \chi_j T_{jyy} + A_j u_j, \tag{2}$$

$$u_j(y,0) = 0,\ T_j(y,0) = 0, \tag{3}$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), u_2(l_2,t) = u_3(l_2,t), \tag{4}$$

$$T_1(0,t) = T_2(0,t), T_2(l_2,t) = T_3(l_2,t), \tag{5}$$

$$\mu_2 u_{2y}(0,t) - \mu_1 u_{1y}(0,t) = -A æ_1, \mu_3 u_{3y}(l_2,t) - \mu_2 u_{2y}(l_2,t) = -A æ_2, \tag{6}$$

$$k_1 T_{1y}(0,t) = k_2 T_{2y}(0,t), k_2 T_{2y}(l_2,t) = k_3 T_{3y}(l_2,t), \tag{7}$$

$$u_1(-l_1,t) = 0, u_3(l_3,t) = 0, \tag{8}$$

$$T_1(-l_1,t) = 0, T_3(l_3,t) = 0, \tag{9}$$

где $u_j, T_j$ - возмущения скорости и температуры, $\nu_j$ - кинематическая вязкость, $\mu_j$ – динамическая вязкость, $\chi_j$ – температуропроводность, $k_j$ - коэффициент теплопроводности, $æ_j$ - температурный коэффициент поверхностного натяжения (предполагается, что коэффициенты поверхностного натяжения линейно зависят от температуры: $\sigma_j = \sigma_j^0 - æ_j \Theta_j, \Theta_j = -A_j x + T_j(y,t)$ - температура), $j = 1,2,3$. В уравнении (2) и граничном условии (6) $A \equiv A_1 = A_2 = A_3$(это следствие равенства температур, см.(5)). Касательные напряжения на границах раздела (6) при $t = 0$ терпят разрыв и это является спецификой задачи (1) – (9).

Видно, что уравнения (1) – (9) образуют две последовательно решаемые задачи для скоростей $u_j$ и возмущений температур $T_j$.

Поставленная задача (1), (2), (4) – (9) имеет стационарное решение

$$\begin{aligned}
&u_1^0(\xi) = \frac{\nu_1}{l_1} a_1(\xi + 1);\ u_2^0(\xi) = \frac{\nu_1}{l_1}(a_2\xi + a_1);\ u_3^0(\xi) = \frac{\nu_1 a_3}{l_1}\left(\xi - \frac{1}{\overline{l_1}}\right);\\
&T_1^0(\xi) = \frac{A l_1 \nu_1}{\chi_1}\left[-\frac{a_1}{6}(\xi^3 + 3\xi^2 - 2) + \frac{b_2}{\delta_2}(\xi + 1)\right];\\
&T_2^0(\xi) = \frac{A l_1 \nu_1}{\chi_1}\left[-\frac{\overline{\chi_1}}{6}(a_2\xi^3 + 3a_1\xi^2) + \frac{b_2}{\delta_2}(\overline{k_1}\xi + 1) + \frac{a_1}{3}\right];\\
&T_3^0(\xi) = \frac{A l_1 \nu_1}{\chi_1}\left[-\frac{\overline{\chi_2} a_3}{6} + \left(\frac{\overline{k_1}\,\overline{k_2} b_2}{\delta_2} + \frac{\overline{l_2}}{\overline{l_1}}\left(\frac{\overline{\chi_2} a_3}{\overline{l_1}}\left(\frac{\overline{l_2}}{2} - 1\right) - \overline{\chi_1}\overline{k_2}\left(a_1 + \frac{\overline{l_2} a_2}{2\overline{l_1}}\right)\right)\right)\xi\,\frac{\overline{k_1}\,\overline{k_2} b_2}{\delta_2 \overline{l_1}}\right.\\
&\qquad\left. - \frac{1}{\overline{l_1}^2}\left(\frac{\overline{\chi_2}\,\overline{l_2} a_3}{\overline{l_1}}\left(\frac{\overline{l_2}}{2} - 1\right) - \overline{\chi_1}\,\overline{k_2}\,\overline{l_2}\left(a_1 + \frac{\overline{l_2}\,a_2}{2\overline{l_1}}\right) + \frac{\overline{\chi_2} a_3}{3\overline{l_1}}\right)\right];
\end{aligned} \tag{10}$$

$$M_1 = \frac{A æ_1 l_1^2}{\nu_1 \mu_2}, M_2 = \frac{A æ_2 l_1^2}{\nu_1 \mu_2}, \delta_1 = \overline{\mu_1}\,\overline{\mu_2}(\overline{l_2} - 1) - \overline{\mu_1}\,\overline{l_2} - \overline{l_1},$$

$$a_1 = \frac{1}{\delta_1}\left[\left(\overline{l_2} + \overline{\mu_2} - \overline{\mu_2}\,\overline{l_2}\right)M_1 + (1 - \overline{l_2})\overline{\mu_2}M_2\right], a_2 = -\frac{1}{\delta_1}\left[\overline{l_1}M_1 + \overline{\mu_1}\,\overline{\mu_2}(\overline{l_2} - 1)M_2\right],$$

$$a_3 = -\frac{\overline{\mu_2}}{\delta_1}\left[\overline{l_1}M_1 + (\overline{l_1} + \overline{\mu_1}\,\overline{l_2})M_2\right],$$

где $\xi = {}^{y}/_{l_1}, \overline{l_1} = {}^{l_1}/_{l_3}, \overline{l_2} = {}^{l_2}/_{l_3}, \overline{\mu_1} = {}^{\mu_1}/_{\mu_2}, \overline{\mu_2} = {}^{\mu_2}/_{\mu_3}, \overline{k_1} = {}^{k_1}/_{k_2}, \overline{k_2} = {}^{k_2}/_{k_3}, \overline{\chi_1} = {}^{\chi_1}/_{\chi_2}, \overline{\chi_2} = {}^{\chi_1}/_{\chi_3}, M_1, M_2$- числа Марангони. Решение (10) описывает термокапиллярное течение Куэтта в слоях.

Нестационарное решение задачи (1) – (9) можно получить, применяя преобразование Лапласа. Тогда уравнения (1), (2) примут

$$p\widehat{U_j}(y,p) = \nu_j\widehat{U_{jyy}}(y,p), p\widehat{T_j}(y,p) = \chi_j\widehat{T_{jyy}}(y,p) + A\widehat{U_j}. \tag{11}$$

К (11) добавляются преобразованные условия (4) – (9) с заменой $u_j(y,t)$ на $\widehat{U_j}(y,p)$ и $T_j(y,t)$ на $\widehat{T_j}(y,p)$.

Общее решение первого уравнения (11), $j = 1, 2, 3$, имеет вид

$$\widehat{U_j} = C_j^1 sh\sqrt{\frac{p}{\nu_j}}y + C_j^2 ch\sqrt{\frac{p}{\nu_j}}y, \tag{12}$$

второго

$$\widehat{T_j}(y,p) = \widehat{C_j^1} sh\sqrt{\frac{p}{\chi_j}}y + \widehat{C_j^2} ch\sqrt{\frac{p}{\chi_j}}y + \widehat{T_{jr}}, \tag{13}$$

где $\widehat{T_{jr}} = \frac{A}{\sqrt{p\chi_j}}\int_{\Omega_j} U(z,p) sh\sqrt{\frac{p}{\chi_j}}(z-y)dz$ - частное решение уравнения.

Постоянные $C_j^1, C_j^2, \widehat{C_j^1}, \widehat{C_j^2}$ нетрудно вычислить, используя граничные условия. Также, проводя достаточно длинные выкладки, можно доказать предельные равенства $\lim_{p\to 0} p\widehat{T_j}(y,p) = T_j^0$ и $\lim_{p\to 0} p\widehat{U_j}(y,p) = u_j^0$ и получить экспоненциальную оценку скорости сходимости с показателем зависящим от физических свойств сред и толщин слоёв для скоростей

$$|w_1(y,t)| \le \left(2\sqrt{D_1}\right)^{1/2} e^{-\delta t/2}, |w_3(y,t)| \le \left(2\sqrt{D_2}\right)^{1/2} e^{-\delta t/2}, |w_3(y,t)| \le (2D_3)^{1/2} e^{-\delta t/2},$$

и возмущений температур

$$|N_1(y,t)| \le \left(2\sqrt{\frac{2E_1(t)\delta_1}{\rho_1 k_1 c_{01}}}\right)^{1/2}, |N_3(y,t)| \le \left(2\sqrt{\frac{2E_1(t)\delta_1}{\rho_3 k_3 c_{03}}}\right)^{1/2},$$

$$|N_2(y,t)| \le \left(2\sqrt{2E_1(t)\delta_1}\left((\rho_1 k_1 c_{01})^{-1/2} + (\rho_2 k_2 c_{02})^{-1/2}\right)\right)^{1/2},$$

$$E_1(t) = \frac{1}{2}\rho_1 c_{01}\int_{-l_1}^{0} N_1^2(y,t)dy + \frac{1}{2}\rho_2 c_{02}\int_{0}^{l_2} N_2^2(y,t)dy + \frac{1}{2}\rho_3 c_{03}\int_{l_2}^{l_3} N_3^2(y,t)dy,$$

где $w_j(y,t) = u_j^0(y) - u_j(y,t), N_j(y,t) = T_j^0(y) - T_j(y,t)$, $\delta, \delta_1, D_1, D_2, D_3$ - положительные постоянные, зависящие от геометрических и физических свойств сред, $c_{0j}$ - коэффициент удельной теплоемкости.