УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ГИЛЬБЕРТА

Пейчева А.С.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук Шлапунов А.А.
Сибирский Федеральный университет

Хорошо известно, что при решении операторных уравнений в нормированных пространствах важную роль играет поведение сопряженного оператора. По этой причине каждое удачное описание сопряженных пространств может дать существенное преимущество при решении (интегральных, дифференциальных, функциональных и т.д.) уравнений. Методика исследования операторных уравнений в пространствах Гильберта применима к широкому классу краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, имеющих большое значение в современном естествознании. Наиболее известным утверждением, описывающим двойственность для пространств Гильберта, является теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на таких пространствах.

Теорема (Рисс). *Пусть H есть полное евклидово пространство со скалярным произведением $(.,.)_H$. Тогда для каждого вектора $w \in H$ функционал $f_w(u) = (u,w)_H$ является непрерывным и линейным, а его норма совпадает с нормой вектора w. Обратно, для любого линейного непрерывного функционала f на гильбертовом пространстве H существует единственный вектор $w_f \in H$ такой, что $f(u) = (u,w_f)_H$ для всех $u \in H$.*

Теорема Рисса, в частности, означает, что пространство H^* всех линейных непрерывных функционалов на H изоморфно самому пространству H.

Приведем еще одну конструкцию, позволяющую эффективно исследовать краевые задачи для дифференциальных уравнений. Для стандартных пространств Соболева ее можно найти, например, в работе Михайлова.

Пусть H_+ и H_0 суть полные евклидовы пространства. Причем H_+ и H_0 выбраны таким образом, что $H_+ \subset H_0$, а вложение непрерывно, т.е. норма $\|.\|_{H_+}$ не слабее нормы $\|.\|_{H_0}$. Кроме того, мы будем предполагать, что H_+ всюду плотно в пространстве H_0.

Введем пространство H_- как пополнение пространства H_+ по следующей норме:

$$\| v \|_{H_-} = sup_{w \in H_+, w\neq 0} \frac{|(v,w)_{H_0}|}{\|w\|_{H_+}}, \; v \in H_+.$$

Напомним, что если элемент $v \in H_-$, то по определению пополнения существует последовательность $\{v_i\} \subset H_+$ такая, что $\{v_i\}$ является фундаментальной в H_- и ее предел будет равен v: $\lim_{i\to\infty} v_i = v$.

Зададим спаривание $< v, u >$ для элементов $v \in H_-$ и $u \in H_+$, которое в дальнейшем будет ключевым при описании двойственности. Именно, положим

$$< u, v > = \lim_{i\to\infty} (u, v_i)_{H_0} \text{ для } v \in H_- \text{ и } u \in H_+, \qquad (1)$$

где $\lim_{i\to\infty} v_i = v$ в H_-.

Лемма 1. *Спаривание $<.,.>$ определено на $H_+ \times H_-$ корректно, иными словами предел всегда существует и не зависит от выбора последовательности $\{v_i\}$, аппроксимирующей v в H_-. Причем справедливо неравенство:*

$$| < u, v > | \leq \| u \|_{H_+} \| v \|_{H_-} \text{ для любого } u \in H_+ \text{ и для любого } v \in H_-$$

Следующая теорема проясняет связь между пространством H_+^*, сопряженным к H_+, и введенным выше пространством H_-.

Теорема 1. (О двойственности). *Справедливо, что* $H_- \cong H_+^*$, *где изоморфизм индуцирован спариванием (1). Более точно, для любого* $v \in H_-$ *функционал*

$$fv(u) =< u, v >, \qquad u \in H_+,$$

определенный на пространстве H_+ *спариванием (1), является непрерывным и линейным, причем норма элемента* v *и функционала совпадают:* $\| f_v \|_{H_+^*} = \| v \|_{H_-}$.

Обратно, для любого $f \in H_+^*$ *существует единственный элемент* $v_f \in H_-$ *такой, что* $f(u) =< u, v_f >$ *для всех* $u \in H_+$.

Рассмотрим пример применения данной теоремы для одной краевой задачи в пространстве $\mathbb{R}^3$, которое представим как произведение двух пространств:

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_t.$$

Координаты точек в нем будем представлять в следующем виде - (x, y, t) или, что тоже самое, $(z, \bar{z}, t)$, где $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$. Пусть Δ обозначает оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$, а D – ограниченную область (т.е.) открытое связное множество с гладкой границей ∂D.

Задача 1. По заданной комплекснозначной функции w найти такую комплекснозначную функцию u, что

$$\begin{cases} -\Delta u + u = w \text{ на } D, & (2) \\ u + Bu = 0 \text{ на } \partial D, & (3) \end{cases}$$

где граничный оператор B задается как $Bu = v_3 \frac{\partial u}{\partial t} + (v_1 - iv_2) * 2\bar{\partial} u,$, $2\bar{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}$ есть удвоенный оператор Коши-Римана, а $v = (v_1, v_2, v_3)$ - вектор единичной внешней нормали к ∂D.

Нетрудно видеть, что для оператора Лапласа справедливо тождество $\Delta = -A^* A$, где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ 2\bar{\partial} \end{pmatrix}, \; A^* = -\left(\frac{\partial}{\partial t}, 2\partial\right), \; 2\partial u = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Поэтому, если, например $u \in C^2(\bar{D})$, то интегрируя по частям приходим к интегральному тождеству, порожденному задачей (2), (3):

$$(A^* A u, v)_{L_2(D)} = (Au, Av)_{L_2(D)} + (u, v)_{L_2(\partial D)} \text{ для любого } v \in C^1(\bar{D}), \qquad (4)$$

где $L_2(D)$ обозначает пространство Лебега функций, квадраты модулей которых интегрируемы по Лебегу в области D.

Положим $H_0 = L_2(D)$,

$$(v, w)_{H_+} = (Au, Av)_{L_2(D)} + (u, v)_{L_2(\partial D)}.$$

Тогда пространство H_+ можно описать так:

$$H_+ = \left\{u \in L_2(D): \frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(D), \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right) \in L_2(D)\right\}.$$

Пространство H_- строится как указано выше. По теореме Рисса правая часть тождества (4) определяет непрерывный линейный функционал, которому, согласно Теореме 1 соответствует некоторый элемент из H_-. Таким образом, тождество (4) фактически определяет непрерывное линейное отображение из H_+ в H_- и мы приходим к обобщенной постановке задачи 1.

Задача 2. По заданному элементу $w \in H_{-}$ найти такую комплекснозначную функцию $u \in H_{+}$, что

$$(Av, Au)_{L_2(D)} + (v, u)_{L_2(\partial D)} = < v, w > \text{ для любого } v \in H_{+}.$$

Сформулируем теорему о существовании и единственности решения данной краевой задачи.

Теорема 2. Для любого $w \in H_{-}$ существует единственное решение $u \in H_{+}$ задачи 2.

Доказательство теоремы проводится стандартным способом.

Как нетрудно видеть, пространство H_{+} содержит стандартное пространство Соболева $H^1(D)$, но не совпадает с ним, а граничное условие задачи 2 не принадлежит тому классу, какой рассматривается в классической теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

Таким образом, доказанная нами теорема 1 о двойственности позволяет существенно расширить класс граничных условий, для которых возможна корректная постановка краевых задач для уравнения Лапласа. Неизбежной платой за это расширение является ухудшение пространства, в котором решение задачи существует. С другой стороны, единственность решения позволяет заключить, что это пространство было выбрано правильно.