УДК 517.9

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ МНОГОМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Романенко Г.В.
научные руководители – канд. физ.-мат. наук Фроленков И.В., д-р физ.-мат. наук Белов Ю.Я.
Сибирский федеральный университет

В работе [1] доказано, что если начальные условия имеют специальный вид, то вопрос отыскания решения исходной обратной задачи сводится к исследованию двух прямых задач, одна из которых содержит выражение для неизвестного коэффициента. Данный результат, полученный Ю.Е. Аниконовым, позволил достаточно удобным образом привести обратную задачу в работе [2] к неклассической прямой задаче для сильно нелинейного уравнения специального вида, а затем доказать существование и единственность решения задачи при помощи метода слабой аппроксимации [3] в классах гладких ограниченных функций.

В данной работе представлено обобщение работы [1] для систем многомерных параболических уравнений. Данный подход позволяет упростить исследование обратных задач подобной структуры.

Задача 1. Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid x \in R^n, z \in R, \quad 0 \le t \le T\}$ систему параболических уравнений

$$u_t^i = a_i(t)u_{zz}^i(t,x,z) + b(t)\Delta_x u^i(t,x,z) + \lambda_i(t,z)B_z^i\left(\sum_{j=1}^k u^j\right),$$

где $B_z^i(\varphi^j) = c_1^i(t)(\varphi_{zz}^j) + c_2^i(t)(\varphi_z^j) + c_3^i(t)(\varphi^j)$, с начальным условием

$$u^i(0,x,z) = u_0^i(x,z), \qquad i = \overline{1,k}.$$

Функции $a_i(t), b(t), c_1^i(t)$ – непрерывные, ограниченные на $[0,T]$, причем $a_i(t) \ge a_0 > 0$, $b(t) \ge b_0 > 0$, $c_1^i(t) \ge c_0 > 0 \ (i = \overline{1,k})$. Функции $u_0^i(x,z)$ заданы в R^{n+1} и действительнозначные.

Функции $\lambda_i(t,z)$ подлежат определению одновременно с решением $u^i(t,x,z)$.

Выполнены условия переопределения

$$u^i(t,0,z) = \psi^i(t,z),$$

и условия согласования $u_0^i(0,z) = \psi^i(0,z)$. Пусть функции $\psi^i(t,z)$ удовлетворяют условиям $B_z^i\left(\sum_{j=1}^k \psi^j\right) \ne 0.$

Справедлива

Теорема 1: Если существуют решения $\varphi(t,x) = (\varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x), ..., \varphi_m(t,x))$ и $f(t,z) = (f_1(t,z), f_2(t,z), ..., f_m(t,z))$ следующих задач

$$\begin{cases} \varphi_t(t,x)) = b(t)\Delta_x \varphi(t,x), \\ \varphi(0,x) = w_0(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} f^i(t,z) = a_i(t) f^i_{zz}(t,z) + \dfrac{\psi^i_t - a_i(t)\psi^i_{zz} - (f^i, \varphi_t(t,0))}{B^i_z\left(\sum\limits_{j=1}^{k} \psi^j\right)} B^i_z\left(\sum\limits_{j=1}^{k} f^j\right), \\ f^i(0,z) = v^i_0(z), \end{cases}$$

то $\lambda_i(t,z)$, $u^i(t,x,z)$, определенные формулами

$$u^i(t,x,z) = (\varphi(t,x), f^i(t,z)) = \sum_{l=1}^{m} \varphi_l(t,x) f^i_l(t,z),$$

$$\lambda_i(t,z) = \frac{\psi^i_t - a_i(t)\psi^i_{zz} - (f^i, \varphi_t(t,0))}{B^i_z\left(\sum\limits_{j=1}^{k} \psi^j\right)},$$

являются решением обратной задачи, в предположении, что

$$u^i_0(x,z) = (w_0(x), v^i_0(z)) = \sum_{l=1}^{m} w_{0l}(x) v^i_{0l}(z).$$

Задача 2. Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid x \in R^n, z \in R, \quad 0 \le t \le T\}$ систему, состоящую из k параболических уравнений вида

$$u^i_t = a_i(t) u^i_{zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u^i(t,x,z) + \lambda_i(t,z) B^i_z(u^i) + \left(\sum_{j \ne i} B^i_z(u^j)\right),$$

где $B^i_z(u^j) = c^i_1(t)(u^j_{zz}) + c^i_2(t)(u^j_z) + c^i_3(t)(u^j)$, с начальным условием

$$u^i(0,x,z) = u^i_0(x,z), \qquad i = \overline{1,k}.$$

Функции $a_i(t), b(t), c^i_1(t)$ – непрерывные, ограниченные на $[0,T]$, причем $a_i(t) \ge a_0 > 0$, $b(t) \ge b_0 > 0$, $c^i_1(t) \ge c_0 > 0$ $(i = \overline{1,k})$. Функции $u^i_0(x,z)$ заданы в R^{n+1} и действительнозначные.

Функции $\lambda_i(t,z)$ подлежат определению одновременно с решением $u^i(t,x,z)$.

Выполнены условия переопределения $u^i(t,0,z)=\psi^i(t,z)$, и условия согласования $u_0^i(0,z)=\psi^i(0,z)$. Пусть функции $\psi^i(t,z)$ удовлетворяют условиям $B_z^i\left(\sum_{j=1}^{k}\psi^j\right)\neq 0.$

Справедлива

Теорема 2: Если существуют решения $\varphi(t,x)=(\varphi_1(t,x),\varphi_2(t,x),...,\varphi_m(t,x))$ и $f(t,z)=(f_1(t,z),f_2(t,z),...,f_m(t,z))$ следующих задач

$$\begin{cases}\varphi_t(t,x))=b(t)\Delta_x\varphi(t,x),\\ \varphi(0,x)=w_0(x),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}f^i(t,z)=a_i(t)f_{zz}^i(t,z)+\dfrac{\psi_t^i-a_i(t)\psi_{zz}^i-(f^i,\varphi_t(t,0))-\left(\sum\limits_{j\neq i}B_z^i(\psi^j)\right)}{B_z^i(\psi^j)}B_z^i(f^j)+\\ \qquad\qquad +\left(\sum\limits_{j\neq i}B_z^i(f^j)\right),\\ f^i(0,z)=v_0^i(z),\end{cases}$$

то $\lambda_i(t,z)$, $u^i(t,x,z)$, определенные формулами

$$u^i(t,x,z)=(\varphi(t,x),f^i(t,z))=\sum_{l=1}^{m}\varphi_l(t,x)f_l^i(t,z),$$

$$\lambda_i(t,z)=\frac{\psi_t^i-a_i(t)\psi_{zz}^i-(f^i,\varphi_t(t,0))-\left(\sum\limits_{j\neq i}B_z^i(\psi^j)\right)}{B_z^i(\psi^j)},$$

являются решением обратной задачи, в предположении, что

$$u_0^i(x,z)=(w_0(x),v_0^i(z))=\sum_{l=1}^{m}w_{0l}(x)v_{0l}^i(z).$$

Список литературы

1. Ю.Е.Аниконов, О методах исследования многомерных обратных задач для эволюционных уравнений, *Докл. РАН*, 331(1993), №3, 409-410.

2. И.В.Фроленков, Г.В.Романенко, О представлении решения одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения с начальными данными в виде произведения, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 5(2012), №1, 122–131.

3. Ю.Я.Белов, С.А.Кантор, Метод слабой аппроксимации, Красноярск, КрасГУ, 1999.