УДК 539.374

ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ПОДАЛГЕБР И ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ, УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Бурмак В. С.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук Сенашов С.И.
Сибирский федеральный университет

Рассмотрим уравнения, описывающие плоское напряженное состояние в случае медленных нестационарных течений. Уравнения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \left(\sqrt{3}\sin\omega\cos 2\varphi - \cos\omega\right)\frac{\partial\omega}{\partial x} + \sqrt{3}\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial y} - 2\sin\omega\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = \sqrt{3}\sin\omega\sin 2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial x} - \left(\sqrt{3}\sin\omega\cos 2\varphi + \cos\omega\right)\frac{\partial\omega}{\partial y} + 2\sin\omega\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k\lambda\left(\sqrt{3}\cos\omega + 3\sin\omega\cos 2\varphi\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = k\lambda\left(\sqrt{3}\cos\omega - 3\sin\omega\cos 2\varphi\right) \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 6k\lambda\sin\omega\sin 2\varphi. \tag{5}$$

Здесь λ - некоторая положительная функция; φ - угол между первым главным направлением тензора напряжения и осью Ox; ω - угол связан со значением среднего давления $\sigma = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)$ именно $\cos\omega = \frac{\sqrt{3}\sigma}{2k}$; k - постоянная пластичности; u, v – компоненты вектора скорости, все функции зависят от x, y, t.

Точечные симметрии систем (1)-(5) используя методику Ли были найдены ранее. Базис алгебры Ли L_9, порождающей группу непрерывных преобразований, которая допускается системой уравнений (1)-(5), имеет вид:

$$X_1 = -y\partial_x + x\partial_y - v\partial_u + u\partial_v + \partial_\varphi,\ X_2 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - \lambda\partial_\lambda,\ X_3 = t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v + \lambda\partial_\lambda,$$

$$X_4 = -y\partial_u + x\partial_v,\ X_5 = \partial_y,\ X_6 = \partial_x,\ X_7 = \partial_v,\ X_8 = \partial_u,\ X_9 = \partial_t.$$

Строим оптимальную систему подалгебр размерности 1, путем поиска наиболее простых неподобных подалгебр, т.е. тех подалгебр, которые под действием внутренних автоморфизмов не переводятся друг в друга. Общий вид одномерной подалгебры таков:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 + \alpha_5 X_5 + \alpha_6 X_6 + \alpha_7 X_7 + \alpha_8 X_8 + \alpha_9 X_9,$$

где $a_i, i = \overline{1,9}$ – константы.

Так оптимальная система подалгебр размерности 1 – θ_1 будет иметь вид:

Таблица 1

Оптимальная система подалгебр размерности 1.

I.	$\alpha X_1 + X_2 + X_3 \pm X_4$;	X.	$X_3 \pm X_5$;
II.	$\alpha X_1 + X_2 - X_3 \pm X_9$;	XI.	$X_4 \pm X_9$;
III.	$X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3$;	XII.	$X_5 \pm X_9$;
IV.	$X_1 \pm X_4 + \alpha X_9$;	XIII.	$X_7 \pm X_9$;
V.	$X_4 \pm X_5 + \alpha X_9$;	XIV.	X_3;
VI.	$X_5 \pm X_7 + \alpha X_9$;	XV.	X_4;

VII.	$X_1 \pm X_9$;	XVI.	X_5;
VIII.	$X_2 + \alpha X_3$;	XVII.	X_7;
IX.	$X_2 \pm X_7$;	XVIII.	X_9.

Здесь α, β, γ - произвольные постоянные, причём разным значениям постоянных соответствуют неподобные подалгебры.

Инвариантные решения, построенных на θ_1 имеют вид:

Таблица 2

Вид инвариантных решений ранга 2.

I.	$\lambda = tf_1(\xi,\eta), \varphi = f_2(\xi,\eta) + \frac{\alpha}{2}\ln t, \upsilon_r = rf_3(\xi,\eta), \upsilon_\theta = rf_4(\xi,\eta) + r\ln r, \xi = e^{\theta} t^{\frac{-\alpha}{2}},$ $\eta = e^{\theta} r^{-\alpha}$;
II.	$\lambda = \lambda(\xi,\eta), \varphi = f_1(\xi,\eta) + \theta, \upsilon_r = r^{-1} f_2(\xi,\eta), \upsilon_\theta = rf_3(\xi,\eta), \xi = \theta \mp t, \eta = e^{\mp t} r$;
III.	$\lambda = tf_1(\xi,\eta), \varphi = f_2(\xi,\eta) + \frac{1}{\beta+\gamma}\ln t, \upsilon_r = r^{\frac{\gamma}{\beta}} f_3(\xi,\eta), \upsilon_\theta = r^{\frac{\gamma}{\beta}} f_4(\xi,\eta), \xi = e^{-\theta(\beta+\gamma)} t,$ $\eta = t^{-\beta_1} r^{(\beta+\gamma)}$;
IV.	$\lambda = \lambda(\xi,r), \varphi = \theta + f_1(\xi,r), \upsilon_r = \upsilon_r(\xi,r), \upsilon_\theta = f_2(\xi,r) \pm \theta r, \xi = t - \alpha\theta$;
V.	$\lambda = \lambda(\xi,x), \varphi = \varphi(\xi,x), v = \frac{f_1(\xi,x)}{\alpha} + \frac{tx}{\alpha}, u = f_2(\xi,x) \mp \frac{y^2}{2}, \xi = t \mp \alpha y$;
VI.	$\lambda = \lambda(\xi,x), \varphi = \varphi(\xi,x), v = f_1(\xi,x) \pm y, u = u(\xi,x), \xi = \alpha y - t$;
VII.	$\lambda = \lambda(\xi,r), \varphi = \theta + f_1(\xi,r), \upsilon_r = \upsilon_r(\xi,r), \upsilon_\theta = \upsilon_\theta(\xi,r), \xi = \theta \mp t$;
VIII.	$\lambda = tf_1(\xi,\theta), \varphi = \varphi(\xi,\theta), \upsilon_r = r^{\alpha} f_2(\xi,\theta), \upsilon_\theta = r^{\alpha} f_3(\xi,\theta), \xi = rt^{\frac{-1}{1+\alpha}}$;
IX.	$\lambda = f_1(\xi,\eta) t^{-1}, \varphi = \varphi(\xi,\eta), v = f_2(\xi,\eta) \pm \ln t, u = u(\xi,\eta), \xi = \frac{t}{x}, \eta = \frac{t}{y}$;
X.	$\lambda = tf_1(\xi,x), \varphi = \varphi(\xi,x), u = tf_2(\xi,x), v = tf_3(\xi,x), \xi = te^{\mp y}$;
XI.	$\lambda = \lambda(x,y), \varphi = \varphi(x,y), v = f_1(x,y) \mp xt, u = f_2(x,y) \pm ty$;
XII.	$\lambda = \lambda(x,y+t), \varphi = \varphi(x,y+t), v = v(x,y+t), u = u(x,y+t)$;
XIII.	$\lambda = \lambda(x,y), \varphi = \varphi(x,y), v = f_1(x,y) \pm t, u = u(x,y)$;
XIV.	$\lambda = tf_1(x,y), \varphi = \varphi(x,y), u = tf_2(x,y), v = tf_3(x,y)$;
XV.	Инвариантного решения нет;
XVI.	$\lambda = \lambda(x,t), \varphi = \varphi(x,t), v = v(x,t), u = u(x,t)$;
XVII.	Инвариантного решения нет;
XVIII.	$\lambda = \lambda(x,y), \varphi = \varphi(x,y), v = v(x,y), u = u(x,y)$.

Где $f_i, i = \overline{1,4}$ - произвольные функции, r и θ – полярные координаты: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, а u_r, u_θ – компоненты вектора скорости: $u = u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta, v = u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta$.

Также были найдены оптимальные системы подалгебр размерности 2, 3 – θ_2, θ_3 соответственно, и инвариантные решения, только для тех подалгебр из θ_2, θ_3, для которых удовлетворяется необходимое условие инвариантности.