УДК 517.96+517.55

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КОНУСАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКИ

НекрасоваТ. И.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук ЛейнартасЕ. К.
Сибирский федеральный университет

Одномерная теория линейных разностных уравнений относится к числу классических и хорошо развитых разделов математики, и в случае постоянных коэффициентов существует исчерпывающее описание пространства решений таких уравнений. Многомерная ситуация значительно сложнее, и даже для уравнений с постоянными коэффициентами исследованы далеко не все возникающие проблемы.

В данной работе сформулирована задача Коши для разностного уравнения в конусе целочисленной решетки Z^n и предъявлена формула для ее решения.

Конусом K в Z^n будем называть линейную комбинацию из s векторов $a^1, \dots, a^s \in Z^n$:

$$K = \{x: x = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_s a^s, \lambda_i \in Z_+, a^i \in Z^n, i = 1, \dots, s\},$$

где $Z_+ -$ целые неотрицательные числа.

Обозначим$A = \{\alpha\} \subset K$– некоторое фиксированное конечное множество точек конуса и рассмотрим разностное уравнение вида

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x+\alpha) = 0,\ x \in K, \tag{1}$$

где c_α –коэффициенты (постоянные) уравнения.

Случай, когда $K = Z_+^n$, рассматривалсявработахBousquet-MélouM., PetkovšekM.(2000),Лейнартаса Е. К. (2007).

Отметим, что разностные уравнения в конусах целочисленной решетки возникают естественным образом в некоторых задачах комбинаторного анализа. Например, в задаче об обобщенных путях Дика.

Пусть дан набор шагов $L = \{h^1, \dots, h^m\} \in Z^n$ и дан заостренный конус K. Обозначим$f(x)$ –число путей, которыми можно дойти из начала координат до точки x, используя только шаги из L и оставаясь в конусе K. Очевидно, что искомое число путей удовлетворяет рекуррентному соотношению вида

$$f(x) = \sum_j f\left(x - a_j\right).$$

Сделаем замену $x \to x + h^1 + \dots + h^m$. Тогда уравнение перепишется в виде

$$f(x + h^1 + \dots + h^m) = \sum_j f\,(x + h + \dots + [j] + \dots + h^m),$$

который можно легко свести к (1). Таким образом, задача о числе путей сводится к разностному уравнению.

Определим отношение частичного порядка $\geq_K$между векторами mи$\alpha \in Z^n$. А именно, будем писать

$$m \underset{K}{\geq} \alpha,$$

если $m + K \subset \alpha + K$. И, кроме того, обозначим

$$m \underset{K}{\ngeq} \alpha,$$

если$m \in K \backslash \{K + \alpha\}$.

Характеристическим многочленом для разностного уравнения (1) назовем многочлен

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha z^\alpha =: Q(z),$$

где $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_n^{\alpha_n}, z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in C^n$, а $C^n -$ n-мерное комплексное пространство.

Многогранником Ньютона N_q многочлена Qназывается выпуклая оболочка вR^nэлементов множества A.

Зафиксируем $m \in N_q \cap Z^n$ и обозначим

$$K_m = \{x \in K : x \underset{K}{\ngeq} m\}$$

Сформулируем задачу. Найти решение уравнения (1), совпадающее наK_m с заданной функцией φ:

$$f(x) = \varphi(x),\ x \in K_m. \tag{2}$$

Решение$P(x)$разностного уравнения

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha\, P(x+\alpha) = \delta_0(x),\ x \in Z^n,$$

где

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \neq 0, \\ 1, \text{если } x = 0. \end{cases}$$

будем называть *фундаментальным решением*.

Продолжим функцию φнаZ^n

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), \text{ если } x \in K_m, \\ 0, \text{ если } x \notin K_m. \end{cases}$$

и определим функцию μ следующим образом:

$$\mu(x) = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha\, \tilde{\varphi}(x+\alpha),\ x \in Z^n, \tag{3}$$

Пусть $S = \{x \in Z^n : \exists\alpha \in A$ такое, что $x + \alpha \in K_m\}$. Обозначим за S_K и$\hat{S}_\text{К}$следующие множества:

$$S_K = S \cap K,$$
$$\hat{S}_\text{К} = S \setminus S_K.$$

Определим функцию

$$\tilde{\mu}(x) = \begin{cases} \mu(x), x \in \hat{S}_\text{К}, \\ 0, x \notin \hat{S}_\text{К}. \end{cases} \tag{4}$$

Будем рассматривать *симплициальные конусы*, то есть такие, в которых каждый элемент выражается через образующие единственным образом. В частности, это означает, что векторы $a^1, \dots, a^s$ линейно независимы и число образующих $s \leq n$.

Теорема.*Пусть $m -$ вершина многогранника Ньютона N_q, удовлетворяющая условию*

$$m \underset{K}{\geq} \alpha,\ \alpha \in A.$$

Тогда задача Коши (1)-(2) имеет единственное решение, которое можно найти по формуле вида

$$f(x) = \sum_{y\in\hat{S}_\text{К}} \tilde{\mu}(y) P(x-y), \tag{5}$$

где $\tilde{\mu}(y)$ строится в соответствии с (3), (4), а $P(x) -$ фундаментальное решение разностного уравнения (1).