УДК 735.29

РЕШЕНИЕ СОПРЯЖЁННОЙ ТЕПЛОВОЙ ЗАДАЧИ В ШАРОВОЙ ОБЛАСТИ МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Резникова И. А.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук Андреев В. К.
Сибирский федеральный университет

1. Постановка задачи

Предположим, что функции $u_1(r,t)$, $u_2(r,t)$ определены соответственно в областях $\overline{\Omega}_1 = \{r|0 \le r \le R_1\}$, $\overline{\Omega}_2 = \{r|R_1 \le r \le R_2\}$ и удовлетворяют уравнениям

$$u_{1t} = \chi_1\left(u_{1rr} + \frac{2}{r}u_{1r}\right) + f_1(r,t),\ t > 0,\ r \in \Omega_1, \quad (1.1)$$

$$u_{2t} = \chi_2\left(u_{2rr} + \frac{2}{r}u_{2r}\right) + f_2(r,t),\ t > 0,\ r \in \Omega_2. \quad (1.2)$$

Функции u_j представляют собой поля температур, χ_j – известные положительные постоянные – коэффициенты температуропроводностей, f_j – заданные внутренние источники тепла, $j=1,2$.

Кроме того, имеются начальные и граничные условия

$$u_1(r,0) = u_2(r,0) = 0; \quad (1.3)$$

$$|u_1(0,t)| < \infty, \quad (1.4)$$

$$u_1(R_1,t) = u_2(R_1,t), \quad (1.5)$$

$$k_1u_{1r}(R_1,t) = k_2u_{2r}(R_1,t), \quad (1.6)$$

$$u_2(R_2,t) = 0, \quad (1.7)$$

где k_j – коэффициенты теплопроводностей. Условие (1.4) представляет собой равенство температур, а (1.5) – равенство потоков тепла на границе раздела $r=R_1$. Известно, что $\chi_j = {k_j}/{c_j\rho_j}$, где c_j – удельные теплоёмкости, ρ_j – плотности сред.

Требуется найти функции $u_1 \in C^2(\Omega_1) \cap C^1(\Gamma_1)$, $u_2 \in C^2(\Omega_2) \cap C^1(\Gamma_1) \cap C(\Gamma_2)$, $\Gamma_1 = \{r|r = R_1\}$, $\Gamma_2 = \{r|r = R_2\}$, удовлетворяющие уравнениям (1.1), (1.2) и условиям (1.3) – (1.7).

2. Решение нестационарной задачи методом преобразования Лапласа

Применим преобразование Лапласа к задаче (1.1) – (1.7). Получим для изображений $U_j(r,p)$

$$U_j'' + \frac{2}{r}U_j' - \frac{p}{\chi_j}U_j = -\frac{1}{\chi_j}F_j, \quad (2.1)$$

где $F_j=F_j(r,p)$ – изображения функций $f_j(r,t)$, $j=1,2;$ использованы свойство связи дифференцирования оригинала и начальные условия (1.3).

Граничные условия:

$$|U_1(0,p)| < \infty,$$
$$U_1(R_1,p) = U_2(R_1,p),$$
$$k_1U_{1r}(R_1,p) = k_2U_{2r}(R_1,p),$$
$$U_2(R_2,p) = 0.$$

Общее решение уравнения (2.1) имеет следующий вид:

$$U_1 = \frac{\operatorname{sh} b}{r \operatorname{sh} a}\left(\frac{1}{\sqrt{p\chi_1}}\int_0^{R_1} \xi F_1 \operatorname{sh}(a-c)d\xi + \frac{e^{l-d}}{\sqrt{p\chi_2}}\int_{R_1}^{R_2} \xi F_2 \operatorname{sh}(l-p)d\xi + C_1(e^d - e^{2l-d})\right) -$$

$$-\frac{1}{r\sqrt{p\chi_1}}\int_0^r \xi F_1\,\mathrm{sh}(b-c)d\xi,$$

$$U_2=\frac{1}{r}\left(\frac{e^{l-m}}{\sqrt{p\chi_2}}\int_{R_1}^{R_2}\xi F_2\,\mathrm{sh}(l-p)d\xi+C_1(e^m-e^{2l-m})-\frac{1}{\sqrt{p\chi_2}}\int_{R_1}^{r}\xi F_2\,\mathrm{sh}(m-p)d\xi\right),$$

$$C_1=\frac{\frac{k}{\chi_1}\int_0^{R_1}\xi F_1\left(\mathrm{cth}\,a\,\mathrm{sh}\,(a-c)-\mathrm{ch}\,(a-c)\right)d\xi+\frac{e^{l-d}}{\sqrt{p\chi_2}}C_2\int_{R_1}^{R_2}\xi F_2\,\mathrm{sh}(l-p)d\xi}{C_3e^d+C_2e^{2l-d}},$$

$$C_2=\left(\sqrt{\frac{p}{\chi_2}}+\frac{1-k}{R_1}+k\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}\mathrm{cth}\,a\right),\qquad C_3=\left(\sqrt{\frac{p}{\chi_2}}-\frac{1-k}{R_1}-k\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}\mathrm{cth}\,a\right),$$

$$a=R_1\sqrt{\frac{p}{\chi_1}},\ \ b=r\sqrt{\frac{p}{\chi_1}},\ \ c=\xi\sqrt{\frac{p}{\chi_1}},\ \ d=R_1\sqrt{\frac{p}{\chi_2}},\ \ l=R_2\sqrt{\frac{p}{\chi_2}},\ \ m=r\sqrt{\frac{p}{\chi_2}},\ \ p=\xi\sqrt{\frac{p}{\chi_2}}.$$

3. Решение стационарной задачи

Предположим, что $f_j(r,t)\to f_j^0(r)$ при $t\to\infty$. Рассмотрим стационарный режим распространения тепла

$$u_j^{0''}(r)+\frac{2}{r}u_j^{0'}(r)=-\frac{1}{\chi_j}f_j^0(r) \qquad (3.1)$$

с граничными условиями

$$|u_1^0(0)|<\infty,$$
$$u_1^0(R_1)=u_2^0(R_1),$$
$$k_1u_1^{0'}(R_1)=k_2u_2^{0'}(R_1),$$
$$u_2^0(R_2)=0.$$

Общее решение уравнения (3.1) имеет следующий вид:

$$u_1^0=\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\frac{k}{\chi_1}\int_0^{R_1}\xi^2 f_1^0(\xi)d\xi-\frac{1}{\chi_1}\int_0^{R_1}\left(\frac{\xi^2}{R_1}-\xi\right)f_1^0(\xi)d\xi-\frac{1}{\chi_2}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{\xi^2}{R_2}-\xi\right)f_2^0(\xi)d\xi+$$
$$+\frac{1}{\chi_1}\int_0^r\left(\frac{\xi^2}{r}-\xi\right)f_1^0(\xi)d\xi,$$

$$u_2^0=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)\frac{k}{\chi_1}\int_0^{R_1}\xi^2 f_1^0(\xi)d\xi-\frac{1}{\chi_2}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{\xi^2}{R_2}-\xi\right)f_2^0(\xi)d\xi+\frac{1}{\chi_2}\int_{R_1}^{r}\left(\frac{\xi^2}{r}-\xi\right)f_2^0(\xi)d\xi.$$

Так как при $x\to 0$ $\mathrm{sh}\,x\sim x$, $\mathrm{ch}\,x\sim 1$, $\exp x\sim 1+x$, легко показать, что

$$\lim_{p\to 0}pU_j(r,p)=u_j^0(r).$$

Другими словами, доказано, что нестационарное решение при больших временах сходится к стационарному, если таковыми являются источники тепла в средах.

Пусть теперь f_j=$f_j(t)$. В этом случае решение уравнения (2.1) будет иметь вид

$$U_1=\frac{\mathrm{sh}\,d}{r\,\mathrm{sh}\,a}\left[\frac{e^{c-b}F_2}{p}\left(\sqrt{\frac{\chi_2}{p}}\mathrm{sh}(c-b)+R_1\mathrm{ch}\,(c-b)-R_2\right)+B_1(e^b-e^{2c-b})-\frac{F_1R_1}{p}\right]+\frac{F_1}{p},$$

$$U_2=\frac{1}{r}\left(B_1(e^l-e^{2c-l})+\frac{e^{c-l}F_2}{p}\left(\sqrt{\frac{\chi_2}{p}}\mathrm{sh}(c-b)+R_1\mathrm{ch}\,(c-b)-R_2\right)\right)-$$
$$-\frac{F_2}{rp}\left(\sqrt{\frac{\chi_2}{p}}\mathrm{sh}(l-b)+R_1\mathrm{ch}\,(l-b)-r\right),$$

$$B_1 = \frac{\frac{kF_1}{\sqrt{p\chi_1}}\left(\sqrt{\frac{\chi_1}{p}} - R_1 \operatorname{cth} a\right) + \frac{e^{c-b} B_2 F_2}{p}\left(\sqrt{\frac{\chi_2}{p}} \operatorname{sh}(c-b) + R_1 \operatorname{ch}(c-b) - R_2\right)}{B_3 e^b + B_2 e^{2c-b}},$$

$$B_2 = \left(\sqrt{\frac{p}{\chi_2}} + \frac{1-k}{R_1} + k\sqrt{\frac{p}{\chi_1}} \operatorname{cth} a\right), \ B_3 = \left(\sqrt{\frac{p}{\chi_2}} - \frac{1-k}{R_1} - k\sqrt{\frac{p}{\chi_1}} \operatorname{cth} a\right),$$

$$a = R_1\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}, \quad b = R_1\sqrt{\frac{p}{\chi_2}}, \quad c = R_2\sqrt{\frac{p}{\chi_2}}, \quad d = r\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}, \quad l = r\sqrt{\frac{p}{\chi_2}}.$$

При условии переопределения (дополнительно в (1.7) задан поток тепла $u_{2r}(R_2, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{const}$) и $f_2=0$ (нет источников тепла во второй среде) можно определить источник тела $f_1(t)$.