УДК 735.29

ЗАВИСИМОСТЬ ЧИСЛА МАРАНГОНИ ОТ ФИЗИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Магденко Е. П.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук, проф. Андреев В. К.
Сибирский федеральный университет

Часто возникает ситуация, когда в контейнере цилиндрической формы хранятся две несмешиваемые теплопроводные жидкости, образующие двухслойную систему. В результате в сосуде имеется поверхность раздела двух различных фракций. При определённых температурах на основаниях цилиндра жидкости начинаются смешиваться. В докладе рассматривается задача о возникновении конвекции в такой системе.

Обозначим через $\Omega_1 = (0, a) \times (0, 2\pi) \times (-h_1, 0)$ и $\Omega_2 = (0, a) \times (0, 2\pi) \times (0, h_2)$ области, занятые жидкостями (рис.1)

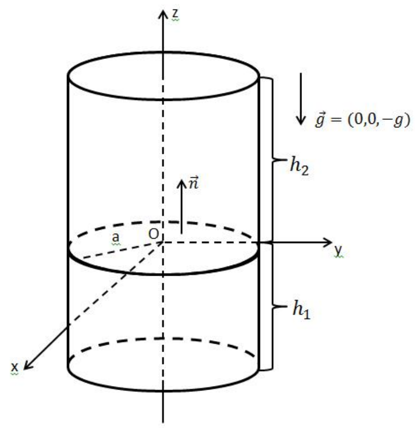


Рис. 1. Схема области конвекции

Равновесное состояние системы в рамках модели Обербека-Буссинеска в цилиндрической системе координат r, φ, z в состоянии покоя описывается уравнениями

$$\nabla \bar{p}_j = -\rho_{0j} \boldsymbol{g} \beta_j \theta_j, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \theta_j}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial z^2} = 0, \tag{2}$$

где $\bar{p}_j = p_j + \rho_{0j} g z$, а $\nabla p_j = \rho_{0j} g \boldsymbol{e}\big(1 - \beta_j \theta_j\big)$, $\boldsymbol{e} = (0{,}0,-1)$, β_j – коэффициент теплового расширения жидкости**,** $j = 1{,}2$ – номер слоя жидкости. На основаниях и боковых стенках цилиндров задаётся температура

$$\theta_1(r, \varphi, -h_1) = \theta_{01}(r, \varphi), \qquad \theta_2(r, \varphi, h_2) = \theta_{02}(r, \varphi), \qquad \theta_j(a, \varphi, z) = \tilde{\theta}_j(\varphi, z). \tag{3}$$

На границе раздела $z = 0$ имеем условия

$$\theta_1 = \theta_2, \qquad k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z}, \tag{4}$$

$$(-\bar{p}_2 + \bar{p}_1 + \rho_{02} g z - \rho_{01} g z)\boldsymbol{n} = \nabla_{\Gamma} \sigma, \tag{5}$$

где ∇_Γ – поверхностный градиент; условия (4), представляют собой равенство температур и потоков тепла, а (5) – баланс всех сил; предполагаем, что поверхностное натяжение линейно зависит от температуры $\sigma = \sigma(\theta) = \sigma^0 - \varkappa\theta$, где в силу равенства (4) $\theta = \theta_1 = \theta_2$, а значит

$$\sigma_r = -\varkappa\theta_r, \qquad \sigma_\varphi = -\varkappa\theta_\varphi. \tag{6}$$

Имеем $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$, $\boldsymbol{e}_r = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_\varphi = (0,1,0)$, поэтому уравнение (5) примет вид $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)(0,0,1) = \alpha_1\boldsymbol{e}_r + \alpha_2\boldsymbol{e}_\varphi = (\alpha_1, \alpha_2, 0)$, а это выполняется тогда и только тогда, когда

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \tag{7}$$

$$\alpha_1 = \nabla\sigma \cdot \boldsymbol{e}_r = \sigma_r, \qquad \alpha_2 = \nabla\sigma \cdot \boldsymbol{e}_\varphi = \sigma_\varphi. \tag{8}$$

Таким образом, с учётом (6) – (8) следует, что при $z = 0$ $\theta_r = \theta_\varphi = 0$. Далее предполагаем, что и внутри цилиндров это равенство верно, а в (3) функции θ_{01}, θ_{02}, $\tilde{\theta}_j$ не зависят от r, φ. Тогда из уравнений (2) получим представления для температур

$$\theta_j = \theta_j(z) = a_j z + b_j. \tag{9}$$

Коэффициенты a_j, b_j находятся из граничных условий (3), (4)

$$a_1 = \frac{k(\theta_{02} - \theta_{01})}{h_2 + kh_1}, \qquad a_2 = \frac{\theta_{02} - \theta_{01}}{h_2 + kh_1}, \qquad b_1 = b_2 = \frac{kh_1\theta_{02} + h_2\theta_{01}}{h_2 + kh_1}, \qquad k = k_1/k_2 \tag{10}$$

Уравнения для возмущений таковы

$$\nabla P_j + \beta_j \boldsymbol{g} T_j + \rho_{0j}\boldsymbol{U}_{jt} = \rho_{0j}\Delta\boldsymbol{U}_j, \tag{11}$$

$$div\boldsymbol{U}_j = 0, \tag{12}$$

$$T_{jt} + \boldsymbol{U}_j \cdot \nabla\theta_j = \chi_j \Delta T_j, \tag{13}$$

где P_j, T_j – возмущение основного решения $\bar{p}_j$, θ_j. Граничные условия в областях Ω_j на поверхности раздела имеют вид

$$T_1 + \frac{\partial\theta_1}{\partial z}R = T_2 + \frac{\partial\theta_2}{\partial z}R, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2, \tag{15}$$

$$-[P]_\Gamma + 2\left[\eta\frac{\partial W}{\partial z}\right]_\Gamma = \left\{\left[\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right]_\Gamma + [\rho_0]_\Gamma \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{n}\right\}R + \sigma\left(R_{rr} + \frac{1}{r}R_r + \frac{1}{r^2}R_{\varphi\varphi}\right), \tag{16}$$

$$\left[\eta\left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)\right]_\Gamma = -\varkappa\left[\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial z}R\right)_r + \frac{\partial T_1}{\partial r}\right], \tag{17}$$

$$\left[\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi} + \frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\right]_\Gamma = -\varkappa\left[\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial z}R\right)_\varphi + \frac{\partial T_1}{\partial\varphi}\right], \tag{18}$$

$$\left[k\frac{\partial T}{\partial z}\right]_\Gamma + [k\nabla\theta]_\Gamma \cdot \boldsymbol{n_1} = \varkappa\theta\nabla_\Gamma \cdot \boldsymbol{U}, \tag{19}$$

$$R_{\boldsymbol{t}} = W_{\boldsymbol{1}}, \tag{20}$$

где $R = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}$ – вектор смещения частиц жидкости, $\boldsymbol{n_1}$ – вектор возмущения нормали; $[f]_\Gamma = f_2 - f_1$ – скачок величины f на поверхности Г. Будем искать решение задачи $(11) - (20)$ в виде

$$\left(\boldsymbol{U}_j, P_j, T_j, R\right) = \left(\boldsymbol{U}_j(r,z), P_j(r,z), T_j(r,z), N\right) exp[i(m\varphi - Ct)], \tag{21}$$

где $\mathrm{C} = \mathrm{C}_r + iC_i$ комплексный декремент.

Рассмотрим осесимметрическую краевую задачу $(11) - (20)$ $\left(m = 0,\ V_j = 0\right)$ с учётом (21).

$$P_{jr} - iC\rho_{0j}U_j = \eta_j\left(U_{jrr} + \frac{1}{r}U_{jr} + U_{jzz} - \frac{U_j}{r^2}\right), \tag{22}$$

$$P_{jz} + \beta_j g T_j - iC\rho_{0j}W_j = \eta_j\left(W_{jrr} + \frac{1}{r}W_{jr} + W_{jzz}\right), \tag{23}$$

$$U_{jr} + \frac{1}{r}U_j + W_{jz} = 0, \tag{24}$$

$$-iCT_j + a_j W_j = \chi_j\left(T_{jrr} + \frac{1}{r}T_{jr} + T_{jzz}\right). \tag{25}$$

Граничные условия $(14) - (20)$ упрощаются до следующих

$$T_1 + a_1 N = T_2 + a_2 N, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2, \tag{27}$$

$$-[P]_\Gamma + 2\left[\eta\frac{\partial W}{\partial z}\right]_\Gamma = \left\{\left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}\right]_\Gamma + [\rho_0]_\Gamma \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{n}\right\}N + \sigma\left(N_{rr} + \frac{1}{r}N_r\right), \tag{28}$$

$$\left[\eta\left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)\right]_\Gamma = -\varkappa[a_1 N_r + T_{1r}], \tag{29}$$

$$\left[k\frac{\partial T}{\partial z}\right]_\Gamma = \varkappa b_1\left(U_{1r} + \frac{1}{r}U_1\right), \tag{30}$$

$$-iCN = W_{\boldsymbol{1}}. \tag{31}$$

Задача $(22) - (31)$ допускает разделение переменных, именно

$$U_j = \frac{1}{r}R(r)F_{jz}(z), \quad W_j = -\frac{1}{r}R_r(r)F_j(z), \quad T_j = \frac{1}{r}R_r(r)G_j(z) \tag{32}$$

где

$$R = R_k(r) = r\left[I_1(\delta_k)J_1\left(\frac{\delta_k}{a}r\right) - J_1(\delta_k)I_1\left(\frac{\delta_k}{a}r\right)\right], \tag{33}$$

а δ_k, $k = 1,2,\ldots$ есть решение уравнения

$$J_1(\delta)I_1'(\delta) - I_1(\delta)J_1'(\delta) = 0, \tag{34}$$

первые корни, которого, равны $\delta_1 = 4.611$, $\delta_2 = 7.799$, $\delta_3 = 10.958$, $\delta_4 = 14.109$, $\delta_5 = 17.256$. Из (33), (34) выводим равенства $R_k(a) = 0$ и $R_{kr}(a) = 0$. Таким образом, условия на боковой поверхности для скоростей и температуры заведомо выполнены.

Используя метод (32), мы получим обыкновенное дифференциальное однородное уравнение с постоянными коэффициентами со сложными граничными условиями. Далее предположим, что система находится в состоянии невесомости ($g = 0$); поверхность раздела не деформируема ($N_0 = 0$); возмущения монотонны ($C = 0$). В результате решение нашего уравнения будет определяться с точностью до двенадцати постоянных, которые находятся из двенадцати граничных условий. Полученная из этих условий система, будет являться алгебраической относительно постоянных. Нетривиальное решение системы уравнений существует тогда и только тогда, когда её определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю. Это даёт возможность найти критические числа Марангони. Аналитические вычисления в системе Maple показывают, что

$$M = \frac{4m^2(k\mu S_1 C_2 M_1 (m^2 - S_1^2)(m^2h^2 - S_2^2) + chisl)}{znam},$$

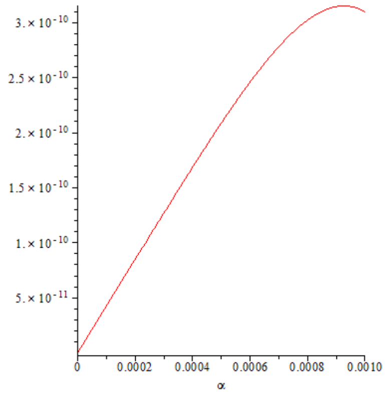
где

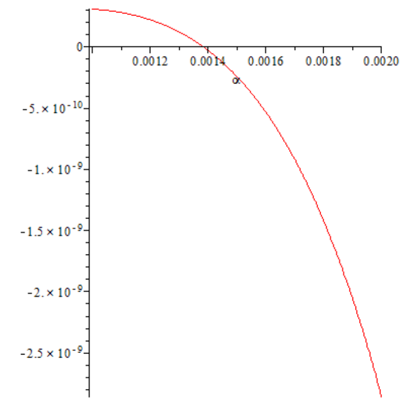
$$chisl = 2(kS_2C_1 + S_1C_2)(m^3h^2\mu + m^3h - m^2S_2C_2 - m^2h^2\mu S_1C_1 - mhS_1^2 - m\mu S_2^2 + \\ +\mu S_1 S_2^2 C_1 + S_1^2 S_2 C_2);$$

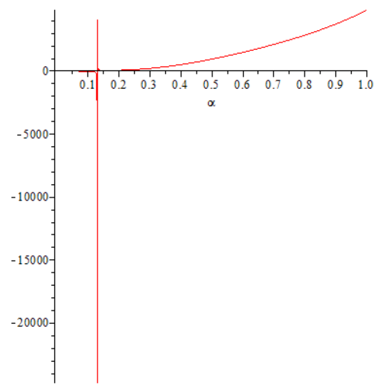
$$znam = \mu(m^5h^3\chi S_1 C_1^2 C_2 - m^3h^3\chi S_1^3 C_2 + m^3 S_2^3 C_1 + m^2h^2 S_1^3 C_2 - m^5h^2 S_2 C_1 - \\ +m^2\chi S_1 S_2^2 + \chi S_1^3 S_2^3 - S_1^3 S_2^3);$$

$h = h_1/h_2$; $m = \alpha\delta_k$; $\alpha = h_2/a$; $k = k_2/k_1$; $\mu = \mu_2/\mu_1$; $\chi = \chi_2/\chi_1$; $M_1 = \varkappa^2 b_1/k_2\mu_2$; $S_1 = sinh(m)$; $C_1 = cosh(m)$; $S_2 = sinh(mh)$; $C_2 = cosh(mh)$.

Рассмотрим конкретные жидкости, когда в верхней части цилиндра расположена муравьиная кислота, а в нижней – трансформаторное масло. Тогда соотношения их физических параметров таковы $k = 2.44021473$, $\mu = 0.09203717913$, $\chi = 1.404958678$. Так же $\varkappa = 0.0022$ Н/мК, $h = 0.5$, $\delta_k = 4.611$.







Для случая, когда имеется однослойная жидкость ($h_2 = 0$) с верхней свободной границей, на которой задан теплообмен с окружающей средой, находим

$$M = \frac{8m(BS_1 + mC_1)(m - S_1C_1)}{S_1^3 - m^3},$$

где $m = \alpha\delta_k$; $\alpha = h_1/a$; $B = \gamma h_1/k_1$. Отметим, что при $m \to \infty$ $M \sim -8m^2$, а при $m \to 0$ $M \sim -8(B + 1)$.