Введение

В динамической геометрии известны «механические» определения кривых второго порядка, которые можно смоделировать в компьютерной среде «GeoGebra». Наша работа посвящена принципиально иному способу построения кривых второго порядка на базе геометрического моделирования операций над числами и определенных нами операций над точками плоскости. В результате экспериментирования в среде «GeoGebra» были подмечены интересные факты, которые потом удалось математически обосновать.

В качестве основных элементов построений используются следующие построения (Рис. 1-3), которые выполняют соответственно сложение (вычитание), умножение (деление) чисел и извлечение квадратного корня из неотрицательного числа (на рис. 3 изображена функция y=sqrt(x)).

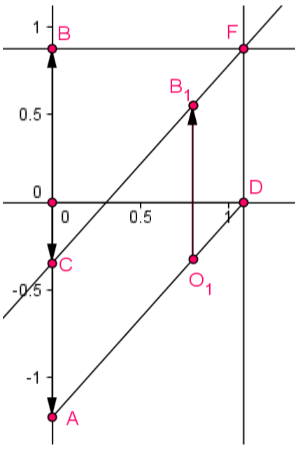

Рис. 1

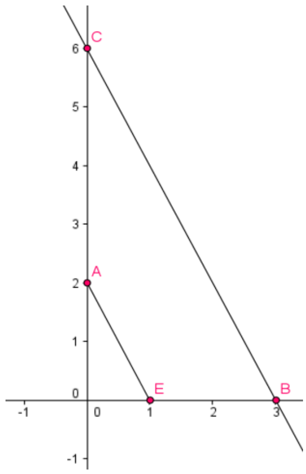

Рис. 2

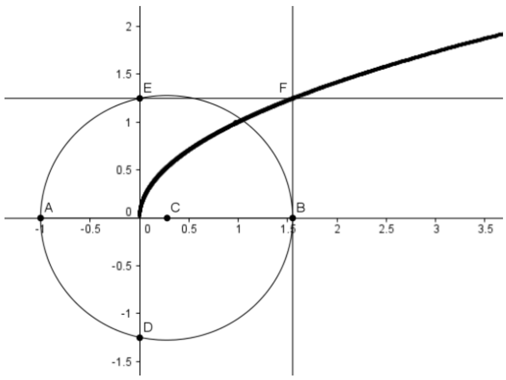

Рис. 3

Основная часть

Определение. Произведением точек (x, y) и (x, z) назовем точку (x, yz). При $z \neq 0$ частным от деления точки (x, y) на точку (x, z) будем называть точку $(x, \frac{y}{z})$. Если $y > 0$, то корнем квадратным из точки (x, y) будем считать точку $(x, \sqrt{y})$.

Теорема 1. *Пусть прямые AD и BC пересекают ось абсцисс в точках A и B, а ось ординат в точках C и D. Тогда множество всех произведений точек этих прямых есть парабола, пересекающая ось абсцисс в точках A и B, с осью симметрии, параллельной оси ординат.*

Доказательство. Докажем, что произведение данных прямых AD и BC есть парабола. По условию, данные прямые не параллельны оси ординат, а значит задаются уравнениями вида соответственно $y = ax + b$ и $y = a_1x + b_1$. По условию, эти прямые не параллельны оси абсцисс, а значит $a \neq 0$ и $a_1 \neq 0$. По определению, произведением данных прямых является множество $\{(x, (ax + b)(a_1x + b_1)) \mid x \in R\}$, задаваемое уравнением $y = aa_1x^2 + (ab_1 + a_1b)x + bb_1$. Поскольку $aa_1 \neq 0$, то это парабола, пересекающая ось абсцисс в точках $A(-\frac{b}{a}, 0)$ и $B(-\frac{b_1}{a_1}, 0)$, ось которой проходит через середину отрезка AB, параллельно оси ординат. Теорема доказана.

Геометрическое моделирование утверждений теоремы в системе GeoGebra приводит к рисункам 1, 2 и 3, взятым с экрана дисплея.

В дополнение заметим, что если данные прямые AD и BC составляют с положительным направлением оси абсцисс одновременно острые (тупые) углы, то a и a_1 имеют одинаковые знаки и $aa_1 > 0$. Ветви параболы направлены вверх (рис. 1, 3). Если же одна из данных прямых образует с положительным направлением оси абсцисс острый угол, а вторая – тупой, то $aa_1 < 0$ и ветви параболы направлены вниз (рис. 2). Если данные прямые совпадают, то парабола касается оси абсцисс (рис.4).

Заметим, что произведение точек двух прямых, параллельных оси абсцисс, есть прямая, параллельная оси абсцисс (рис. 5).

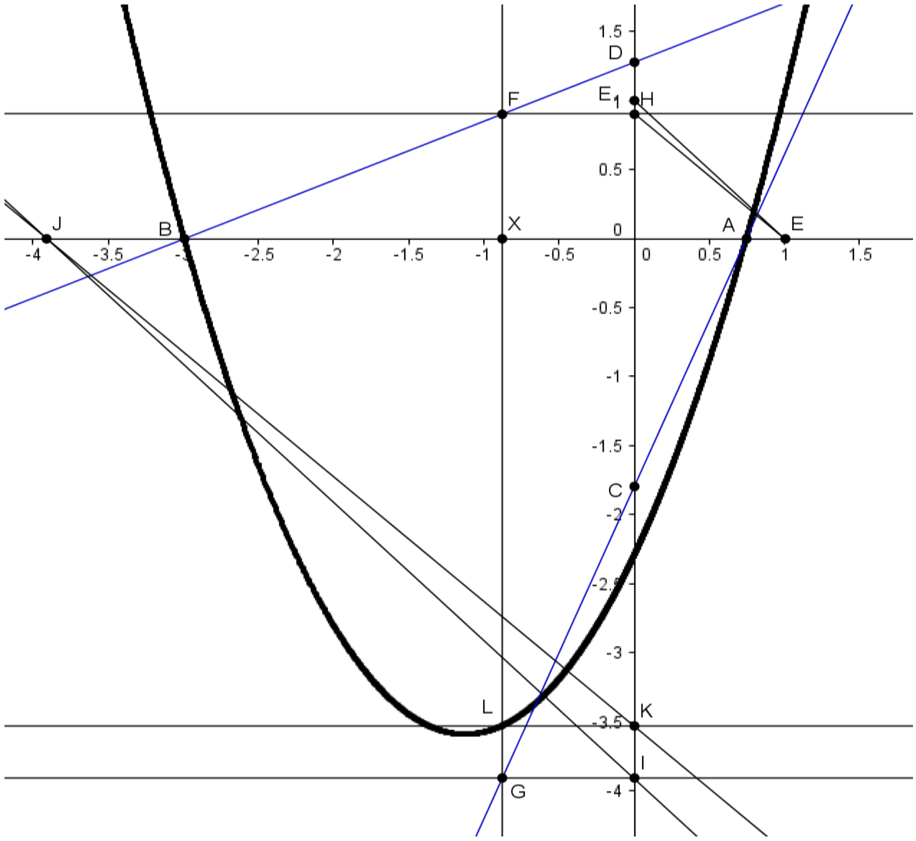

Рис. 1

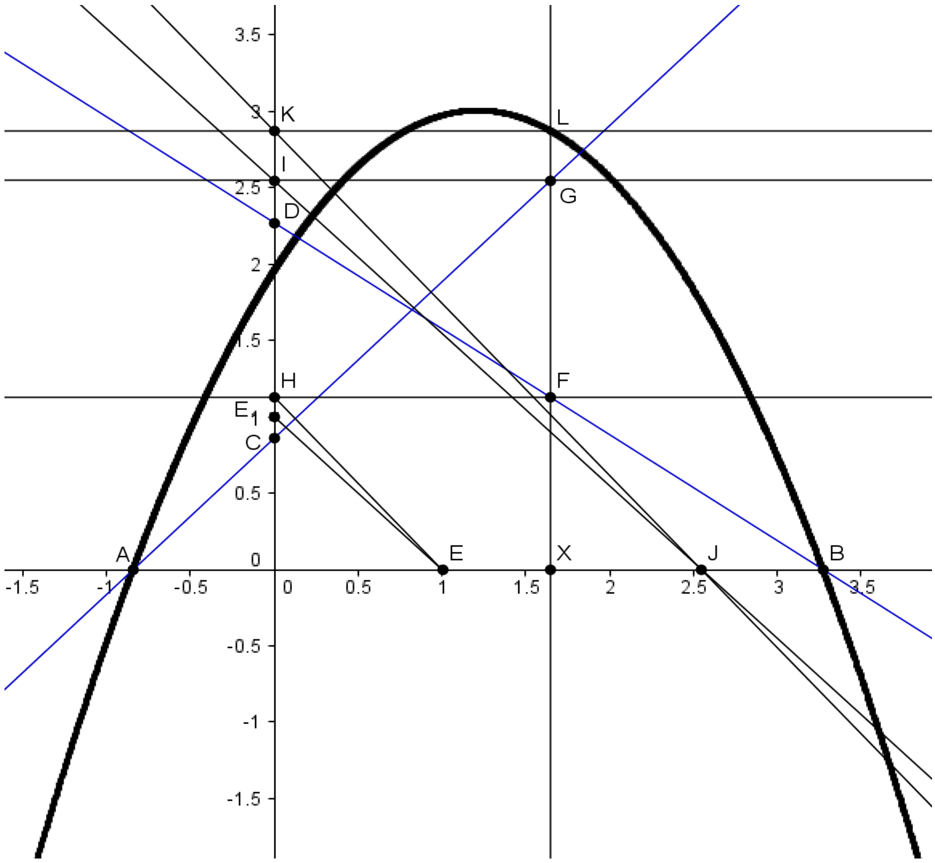

Рис. 2

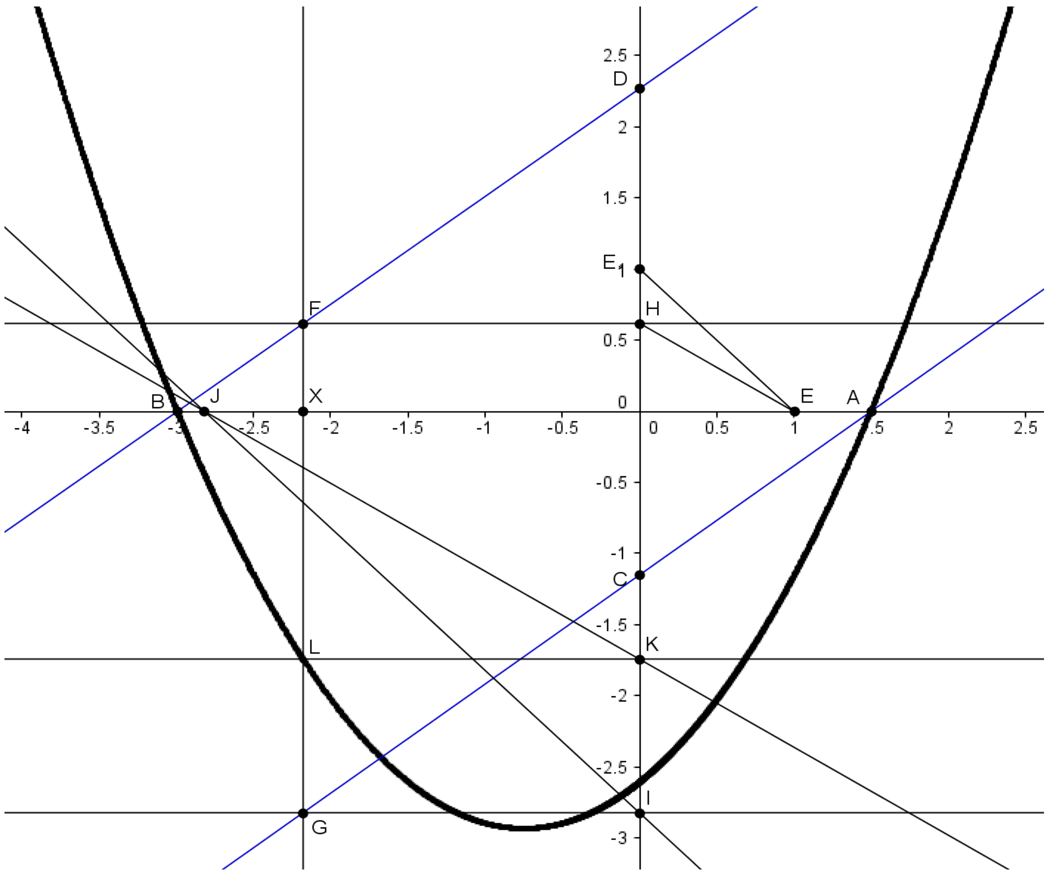

Рис. 3

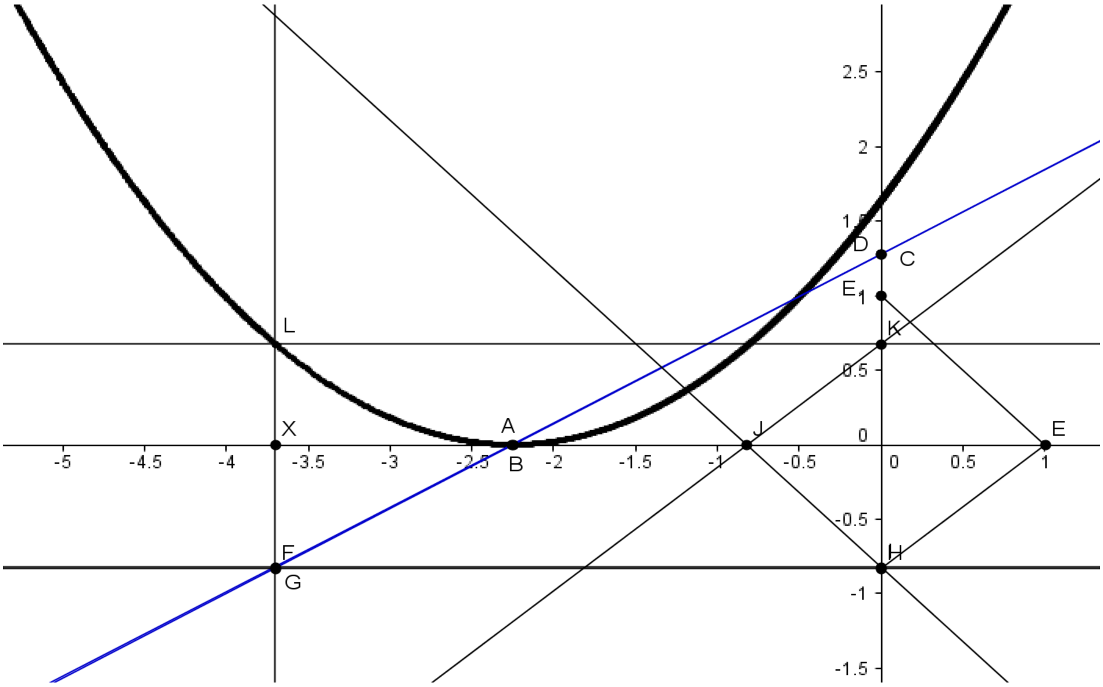

Рис. 4

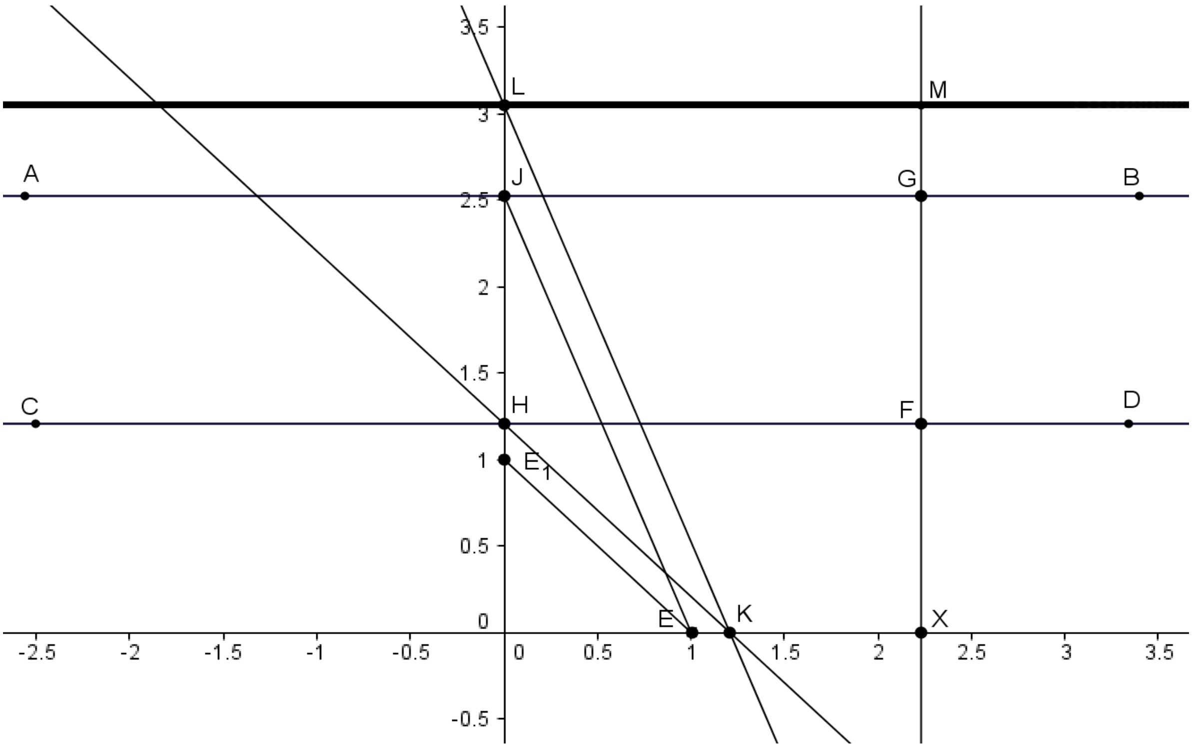

Рис.5

ТЕОРЕМА 2. *Пусть различные точки* A *и* B *лежат на оси абсцисс и точка* D *отлична от* A *и* B. *Рассмотрим параболу, являющуюся множеством всех произведений точек пары прямых* (AD, BD). *Множество всех корней квадратных из точек этой* *параболы, абсциссы которых принадлежат отрезку* AB*, образует эллипс с осью* AB*, а множество всех корней квадратных из точек параболы, абсциссы которых не принадлежат отрезку* AB *вместе с концами этого отрезка образует гиперболу.*

Доказательство. Пусть прямые AD и BD задаются уравнениями соответственно $y = ax + b$ и $y = a_1x + b_1$. По теореме 1, множество точек $\{(x,(ax+b)(a_1x+b_1)) \mid x \in R\}$, задаваемое уравнением $y = aa_1x^2 + (ab_1 + a_1b)x + bb_1$, есть парабола, пересекающая ось абсцисс в точках $A(-\frac{b}{a},0)$ и $B(-\frac{b_1}{a_1},0)$, ось которой проходит через середину отрезка AB, параллельно оси ординат.

1. Пусть $a > 0$, $a_1 < 0$ (как на рисунках 6 и 7). Тогда $aa_1 < 0$, а значит, ветви параболы $y = aa_1x^2 + (ab_1 + a_1b)x + bb_1$ направлены вверх. Парабола пересекает ось абсцисс в точках $A(-\frac{b}{a},0)$ и $B(-\frac{b_1}{a_1},0)$. Будем считать, что $x_1 < x_2$. Рассмотрим точки параболы, абсциссы которых принадлежат отрезку AB, то есть удовлетворяют неравенству $x_1 \le x \le x_2$. Ординаты этих точек неотрицательны, а значит можно извлечь корень квадратный из ординат. Докажем, что множество точек $M = \{(x, \pm\sqrt{aa_1x^2 + (ab_1 + a_1b)x + bb_1} \mid x_1 \le x \le x_2\}$ есть эллипс, а множество точек $N = \{(x, \pm\sqrt{|aa_1x^2 + (ab_1 + a_1b)x + bb_1|} \mid x \le x_1 \text{ èëè } x_2 \le x\}$ есть гипербола.

1.1. Множество точек M задается уравнениями $y = \sqrt{aa_1x^2 + (ab_1 + a_1b)x + bb_1}$ и $y = -\sqrt{aa_1x^2 + (ab_1 + a_1b)x + bb_1}$ при $x_1 \le x \le x_2$, а значит уравнением $y^2 = aa_1x^2 + (ab_1 + a_1b)x + bb_1$ при тех же ограничениях на x. Это уравнение приводится к виду $(2aa_1x + ab_1 + a_1b)^2 - 4aa_1y^2 = (ab_1 + a_1b)^2$. Вспомним, что $aa_1 < 0$, поэтому это уравнение заменой переменных легко приводится к каноническому уравнению эллипса.

1.2. Множество точек N задается уравнениями $y = \sqrt{|aa_1x^2 + (ab_1 + a_1b)x + bb_1|}$ и $y = -\sqrt{|aa_1x^2 + (ab_1 + a_1b)x + bb_1|}$, $x \le x_1$ или $x_1 \le x$, а значит уравнением

$y^2 = |aa_1x^2 + (ab_1 + a_1b)x + bb_1|$. Поскольку $aa_1x^2 + (ab_1 + a_1b)x + bb_1 \le 0$, то получаем уравнение $y^2 = -(aa_1x^2 + (ab_1 + a_1b)x + bb_1)$, которое приводится к виду $(2aa_1x + ab_1 + a_1b)^2 + 4aa_1y^2 = (ab_1 + a_1b)^2$. Так как $aa_1 < 0$, то это уравнение заменой переменных приводится к каноническому уравнению гиперболы. Теорема доказана.

Геометрическое моделирование утверждений теоремы 2 в системе GeoGebra приводит к рисункам 6 и 7, взятым с экрана дисплея.

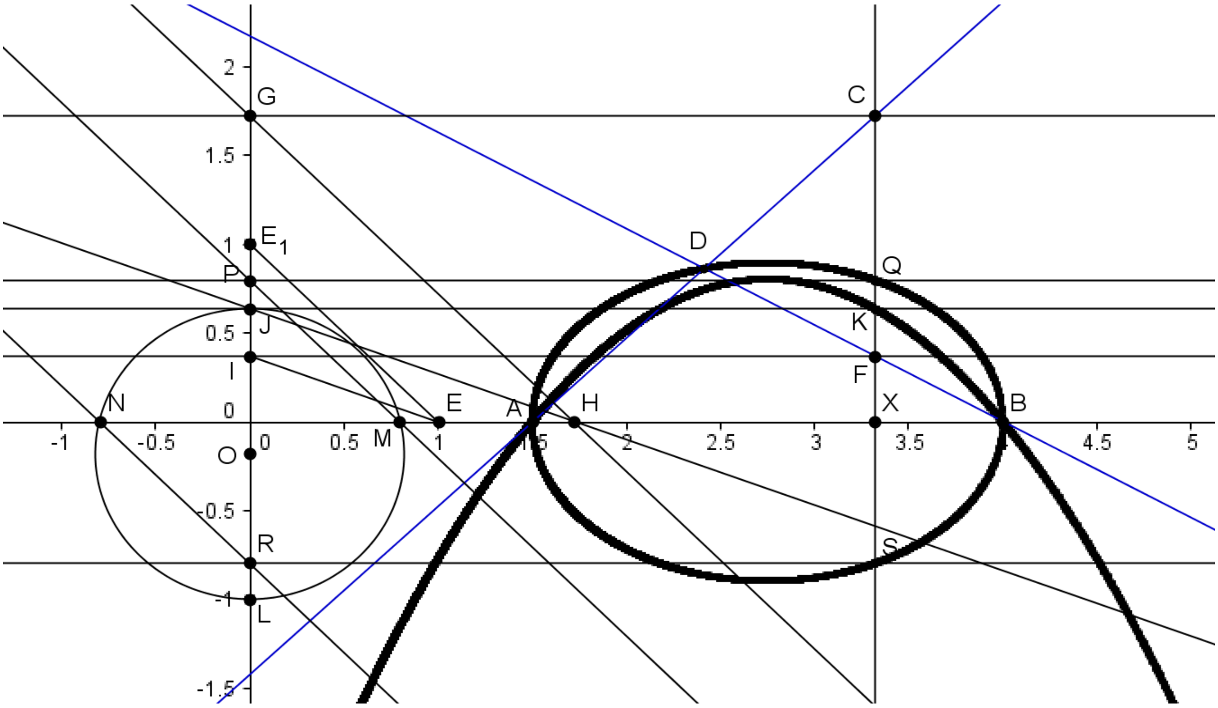

Рис. 6

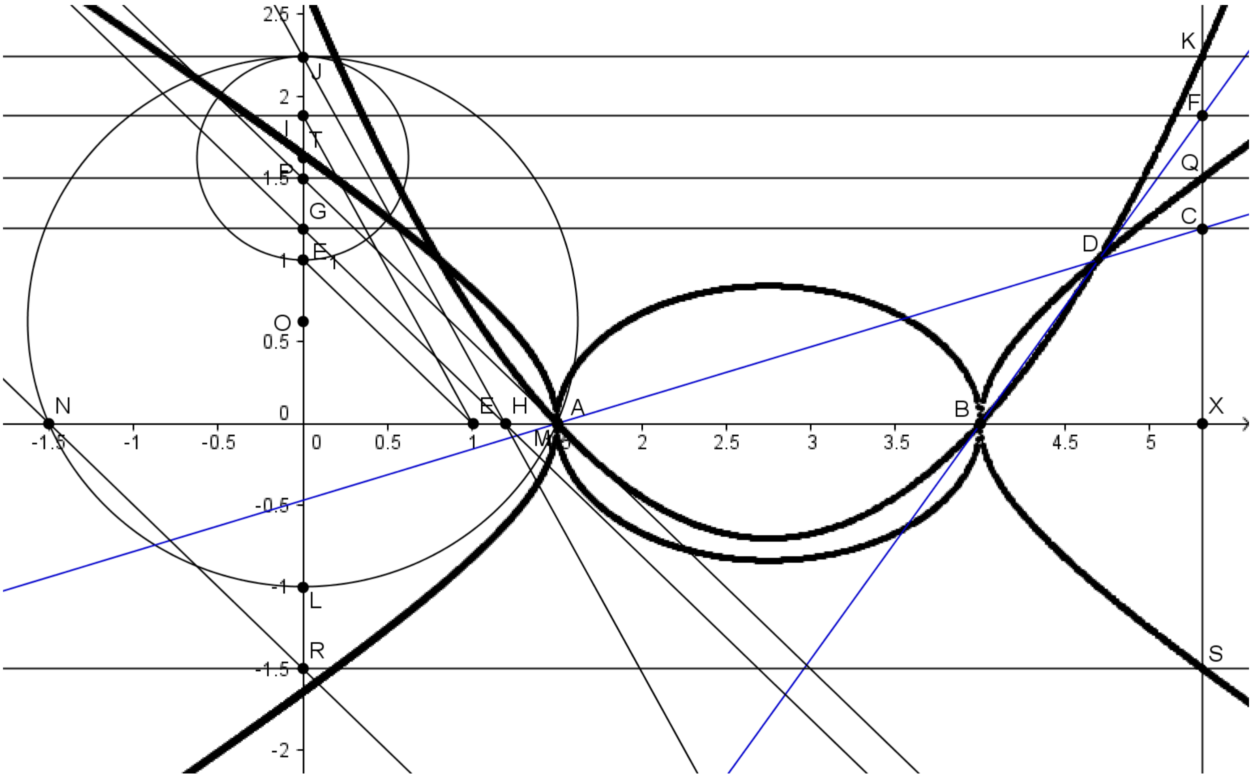

Рис. 7

ТЕОРЕМА 3. *При любом выборе вершин треугольника* ABC*, основание которого* BC *лежит на оси абсцисс, результатом деления точек прямой* AB *на точки прямой* AC *является гипербола, проходящая через точку пересечения прямой* AC *с осью абсцисс, имеющая вертикальную асимптоту, проходящую через точку пересечения прямой* AB *с осью абсцисс. При этом, гипербола не изменится, если вершину* A *заменить любой точкой перпендикуляра к оси абсцисс, проходящего через проекцию точки* A *на эту ось.*

Доказательство. Выбираем вершины треугольника: $A(a,d)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$. Уравнение прямой AB: $\dfrac{x-a}{b-a}=\dfrac{y-d}{0-d}$, откуда $y=\dfrac{d}{a-b}x-\dfrac{bd}{a-b}$. Аналогично получаем уравнение прямой AC: $y=\dfrac{d}{a-c}x-\dfrac{cd}{a-c}$. Результат деления точек прямой AB на точки прямой AC есть кривая $y=\dfrac{(dx-bd)(a-c)}{(dx-cd)(a-b)}$. После сокращения на d получаем уравнение $y=\dfrac{(x-b)(a-c)}{(x-c)(a-b)}$, не зависящее от d. Это означает, что при замене точки A другой точкой $A_1(a,b_1)$ с той же проекцией на ось абсцисс получаем ту же самую кривую.

Видим, что кривая проходит через точку $B(b,0)$ и имеет вертикальную асимптоту, проходящую через точку $C(c,0)$.

Осталось доказать, что линия, задаваемая уравнением $y=\dfrac{(x-b)(a-c)}{(x-c)(a-b)}$, есть гипербола. Для этого достаточно привести это уравнение к каноническому виду. Геометрическое моделирование деления точек прямой AB на точки прямой AC представлено на рисунке 2, взятом с экрана дисплея. Теорема доказана.

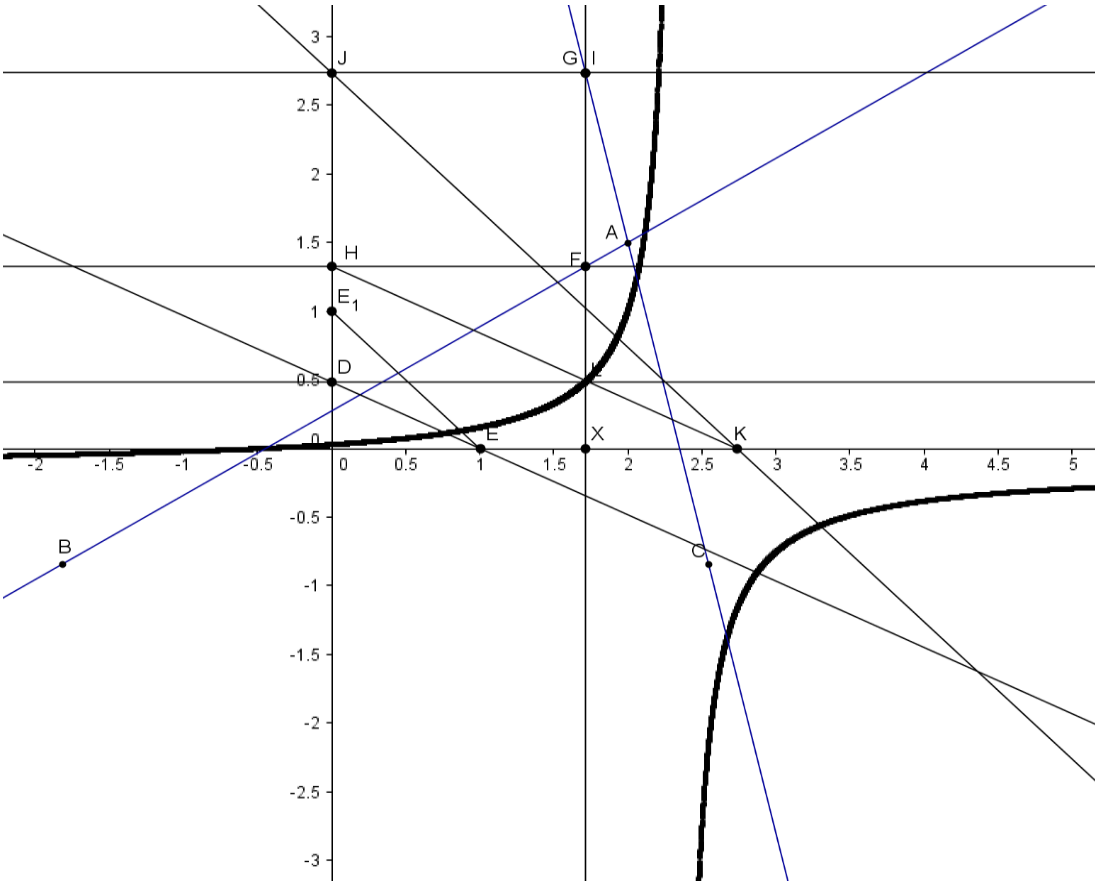

Рис. 8

ТЕОРЕМА 4. *1. Всякую параболу при подходящем выборе прямоугольной декартовой системы координат можно представить в виде множества всех произведений точек некоторых прямых.*

2. Всякий эллипс при подходящем выборе прямоугольной декартовой системы координат можно представить в виде множества всех корней квадратных из точек параболы $y=b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x^2$, *абсциссы которых принадлежат отрезку* $[-a,a]$.

3. Всякую гиперболу при подходящем выборе прямоугольной декартовой системы координат можно представить в виде множества всех точек, являющихся результатом деления точек одной прямой на точки другой прямой.

Доказательство:

1. Известно, что парабола есть множество тех и только тех точек, каждая из которых одинаково удалена от данной точки F (называемой фокусом) и от данной прямой (называемой директрисой). Пусть расстояние от фокуса до директрисы равно $2p$. Определим прямоугольную декартову систему координат, взяв в качестве оси абсцисс прямую, параллельную директрисе и делящую расстояние от точки до директрисы пополам, а в качестве оси ординат – ось данной параболы. Тогда данная парабола будет задана каноническим уравнением $x^2 = 2py$. Перепишем его в виде $y = (\frac{1}{2p}x) \cdot x$. Видим, что множество всех точек параболы есть множество $\{(x, \frac{1}{2p}x) \cdot (x, x) \mid x \in R\}$, то есть представляет собой множество всех произведений точек прямой $y = \frac{1}{2p}x$ на точки прямой $y = x$ (являющейся биссектрисой 1-3 координатных углов).

2. Пусть дан эллипс. Известно, что можно выбрать прямоугольную систему координат так, чтобы данный эллипс задавался каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Перепишем уравнение в виде $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$, $y = \pm\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}$. Последнее уравнение задает множество всех корней квадратных из точек параболы $y = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = (b + \frac{b}{a}x)(b - \frac{b}{a}x)$, которая представляет собой множество всех произведений точек прямых $y = b + \frac{b}{a}x$ и $y = b - \frac{b}{a}x$.

3. Пусть дана гипербола. Известно, что можно выбрать прямоугольную систему координат так, чтобы данная гипербола задавалась каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Перепишем уравнение в виде $y = (\frac{x}{a} + \frac{y}{b})(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 1$. Перейдем к новой прямоугольной системе координат по формулам $x'=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$, $y'=\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}$. В новой системе координат уравнение гиперболы примет вид $x'y'=1$, или $y'=\dfrac{1}{x'}=-1+\dfrac{x'+1}{x'}$, $y'+1=\dfrac{x'+1}{x'}$. Наконец, перейдем к новой прямоугольной системе координат по формулам $x''=x'$, $y''=y'+1$ и получим уравнение $y''=\dfrac{x''+1}{x''}$. Это уравнение задает множество всех частных от деления точек прямой $y''=x''+1$ на точки прямой $y''=x''$. Теорема доказана.

В качестве приложения разработанных методов приведем новые способы вычерчивания параболы, эллипса и гиперболы.

ВЫЧЕРЧИВАНИЕ ПАРАБОЛЫ

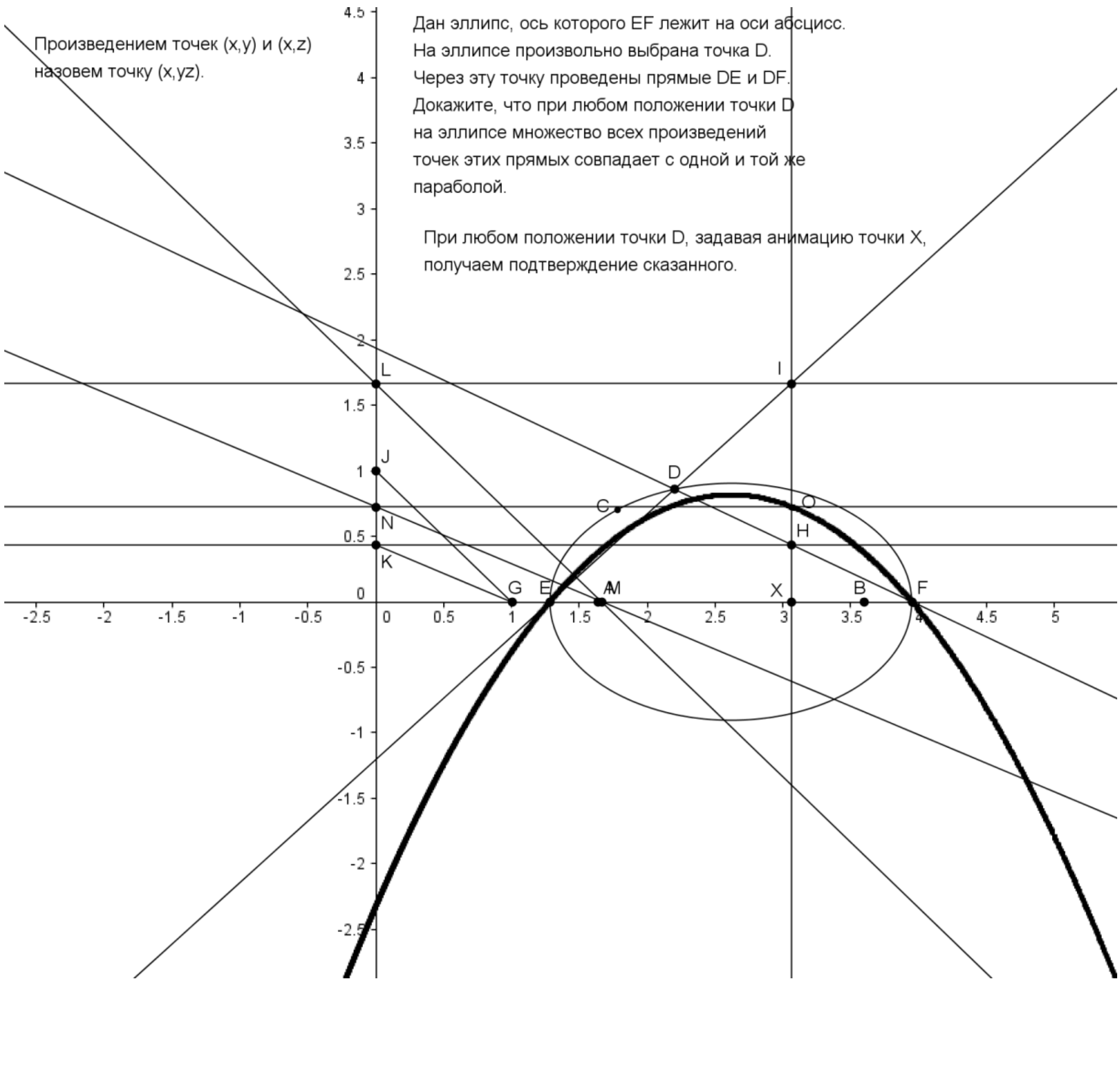

Рис. 9

ВЫЧЕРЧИВАНИЕ ЭЛЛИПСА

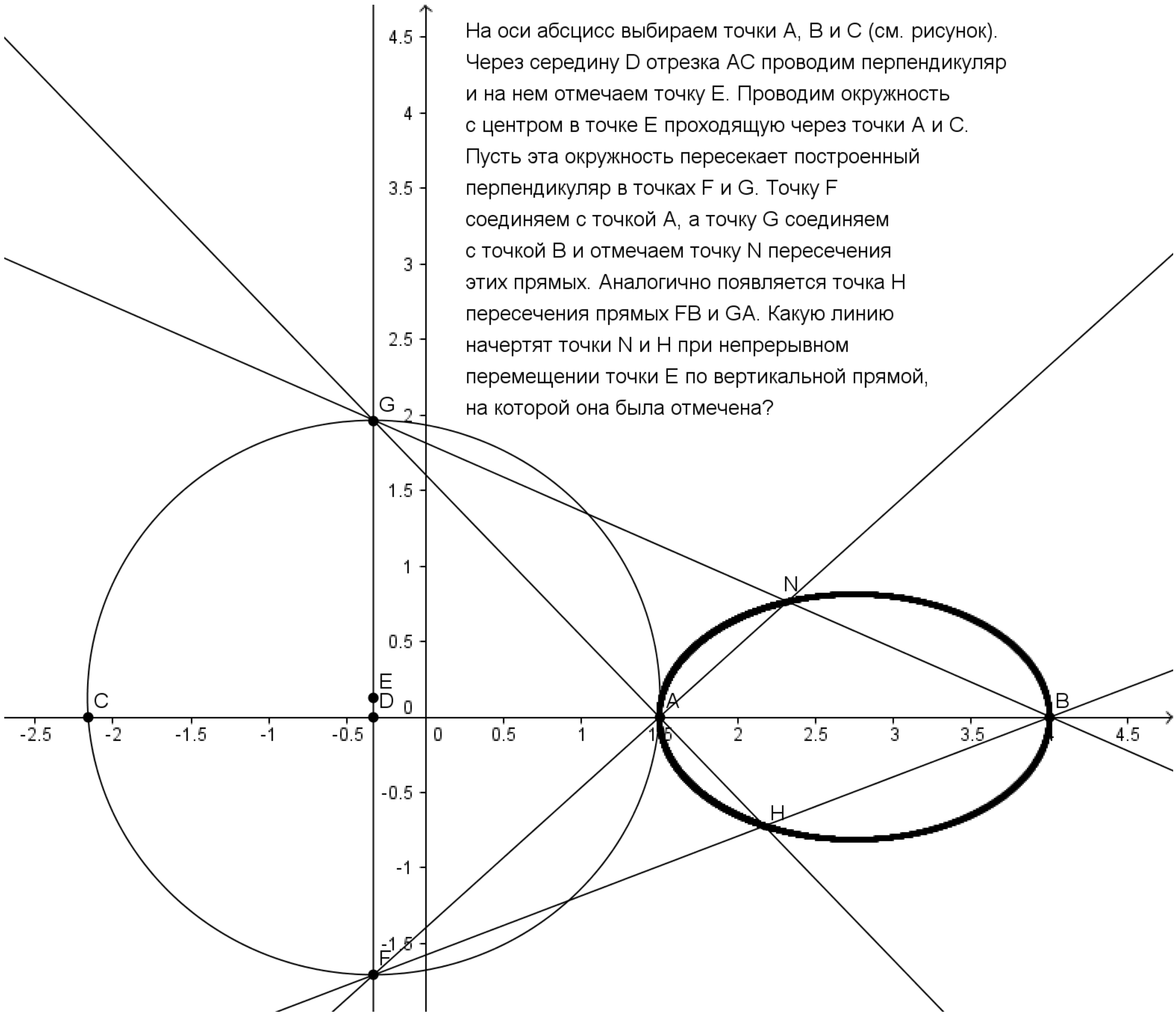
На оси абсцисс выбираем точки A, B и C (см. рисунок).
Через середину D отрезка AC проводим перпендикуляр
и на нем отмечаем точку E. Проводим окружность
с центром в точке E проходящую через точки A и C.
Пусть эта окружность пересекает построенный
перпендикуляр в точках F и G. Точку F
соединяем с точкой A, а точку G соединяем
с точкой B и отмечаем точку N пересечения
этих прямых. Аналогично появляется точка H
пересечения прямых FB и GA. Какую линию
начертят точки N и H при непрерывном
перемещении точки E по вертикальной прямой,
на которой она была отмечена?
G
N
C
E
D
A
B
H
F

Рис. 10

ВЫЧЕРЧИВАНИЕ ГИПЕРБОЛЫ

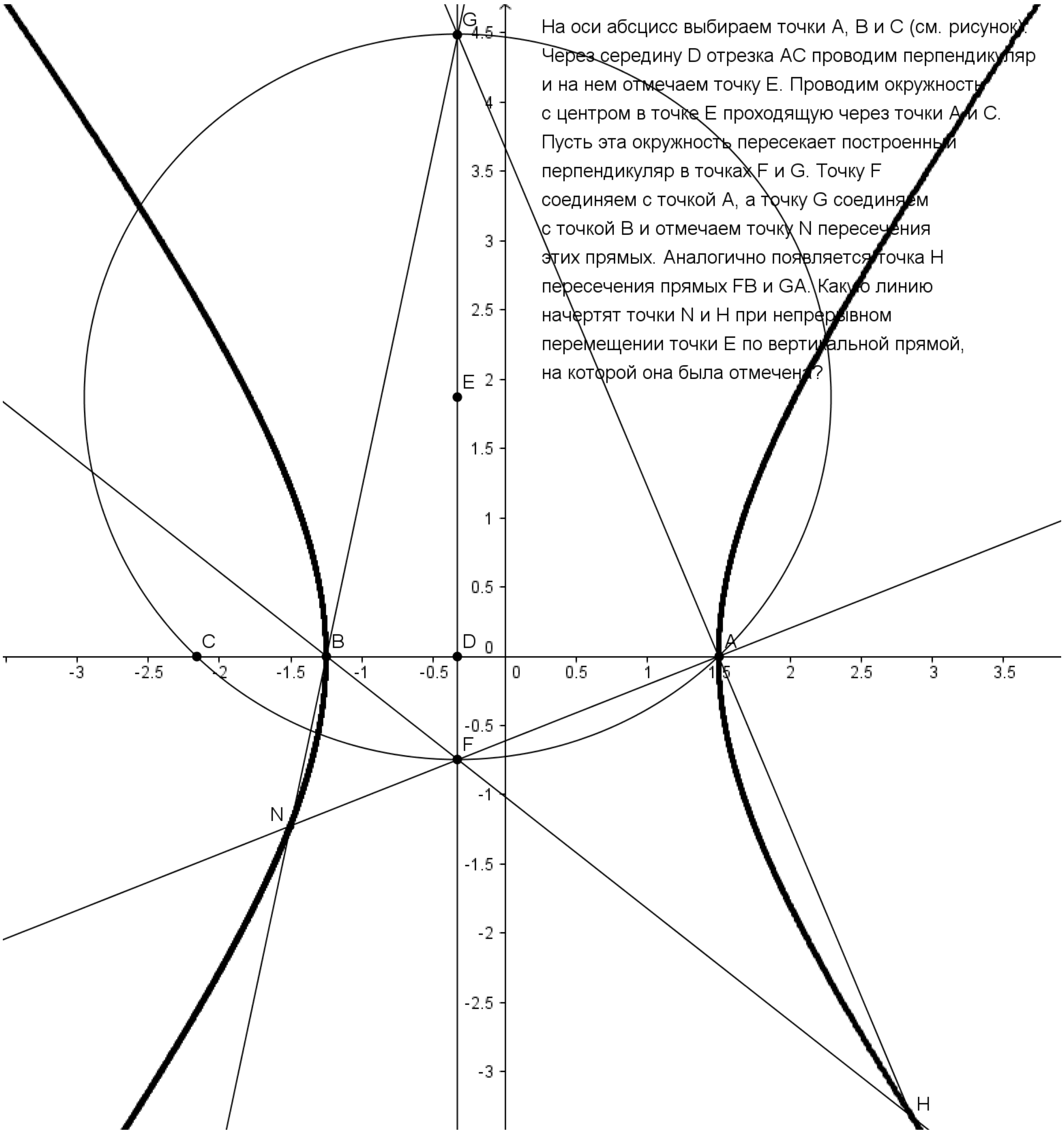

Рис. 11