УДК 51

МЕТОД РУНГЕ: ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ПОДХОД ДЛЯ УРАВНЕНИЙ 3-Й И 4-Й СТЕПЕНИ

Сопкова В. А.

научный руководитель д-р физ.-мат. наук, Осипов Н. Н.

МБОУ СОШ школа № 10

В работе [1] немецкий математик Карл Рунге получил первую общую теорему о конечности множества целых точек на алгебраических кривых из некоторого достаточно широкого класса. Более того, предложенный им метод позволял находить эффективные границы для целых точек таких кривых. Однако при практическом применении метода Рунге необходимо разлагать в ряд Лорана ветви соответствующей алгебраической функции, так что этот метод нельзя считать элементарным.

В работе предлагается полностью элементарная версия метода Рунге для решения кубических уравнений с двумя неизвестными в целых числах [2], [3]. В частности, предложенный метод позволяет дать совершенно элементарное доказательство теоремы о конечности множества решений кубических диофантовых уравнений, удовлетворяющих условию Рунге.

В статье [3] указывается на неочевидность компьютерной реализации предложенного элементарного подхода к решению кубических уравнений. Мы предлагаем вариант такой реализации для уравнений с фиксированной старшей однородной частью:

$$y(2y^2-x^2)+a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+a_4x+a_5y+a_6=0,$$

где $a_1a_2+a_4\neq 0$. Частным случаем этого уравнения является уравнение

$$y(2y^2-x^2)-x-c=0 \qquad (1)$$

из работы [4], в которой для его решений получена оценка $|y|\leq 10|c|$. Как показано в [3], эту оценку можно улучшить до

$$|y|\leq (2c^2+1)^{1/2}+|c|,$$

причём последняя оценка будет уже точной для бесконечно многих c. Прямое применение данной оценки приводит к перебору длиной $O(c)$, однако мы можем оптимизировать алгоритм поиска решений и сократить длину перебора до $O(c^{1/2})$. В работе приводится статистика для числа решений уравнения (1) в пределах $1\leq c\leq 10^5$.

Поскольку метод Рунге применим к уравнениям любой степени, лишь бы они удовлетворяли условию Рунге, возникает естественное желание поискать элементарный подход и в некоторых других частных ситуациях.

В работе рассматриваются многочисленные и разнообразные примеры решения диофантовых уравнений 4-й степени с двумя неизвестными. Эти примеры представляются нам содержательными (не допускают решения другими известными нам элементарными способами) и охватывающими все наиболее интересные случаи, связанные с методом Рунге. Приведём некоторые из них:

$$x^4-5xy^3+2x^2+y^2+1=0,$$

$$2x^4-xy^3-y^3+y^2=0,$$

$$xy^3-x^3-y^3+y^2=0,$$

$$xy(y^2-2x^2)+y^3-xy^2-x+1=0.$$

И ещё один пример уравнения 5-й степени, которое также может быть решено элементарно:

$$2x^4y-2x^3-y^3-1=0.$$

По-видимому, предложенный нами элементарный подход к решению довольно широкого класса диофантовых уравнений 3-й и 4-й степени является новым в олимпиадной теории чисел. Об этом свидетельствует и обсуждение соответствующих задач на таких известных научных форумах, как dxdy.ru и artofproblemsolving.com.

1. *Runge C.* Uber ganzzahlige Loosungen von Gleichungen zwischen zwei Veranderlichen // J. reine und angew. Math. 1887. V. 100. P. 425 – 435.

2. *Сопкова В.А.* Элементарная версия метода Рунге для кубических уравнений // В сб.: Научные труды молодых исследователей Краевого научного общества учащихся. Красноярск, 2011. С. 67 – 69.

3. *Осипов Н.Н.* Элементарная версия метода Рунге для кубических уравнений // Математика в школе. 2012. № 1. С. 64 – 69.

4. *Hilliker D.L.* An Algorithm for Solving a Certain Class of Diophantine Equations // Math. Comput. 1982. V. 38. № 158. P. 611 – 626.