УДК 519.248:[33+301+159.9]

НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА КАК ПРОЕКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ. ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЙ ВЗГЛЯД

Нартов Я.В.

Научный руководитель: доц., канд. физ.-мат. наук. Семёнова Д.В

Сибирский Федеральный Университет

В работах по нечетким множествам время от времени утверждается, что теория нечеткости является самостоятельным разделом прикладной математики и не имеет отношения к теории вероятностей. Некоторые авторы, обсуждавшие взаимоотношения теории нечеткости и теории вероятностей, подчеркивали различие между этими областями теоретических и прикладных исследований. Как оказалось тория нечетких множеств тесно связана с теорией случайных множеств. В работах И. Гудмэна было показано, что нечеткие множества естественно рассматривать как «проекции» случайных множеств. Рассмотрим этот метод сведения теории нечетких множеств к теории случайных множеств в эвентологической интерпретации.

Пусть $(\Omega, \mathrm{F}\ , P)$ – вероятностное пространство.

Случайное множество событий под конечным множеством $\mathfrak{X} \subseteq F$ определяется как случайный элемент

$$K : (\Omega, F, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right)$$

Со значениями в измеримом пространстве $\left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right)$, где $2^{\mathfrak{X}}$ – множество всех подмножеств $\mathfrak{X}$, $2^{2^{\mathfrak{X}}}$ – алгебра всех его подмножеств.

Вместе со случайным множеством событий K под $\mathfrak{X}$ определено и его теоретико-множественное дополнение $K^c = \mathfrak{X} - K$ – случайное множество событий под $\mathfrak{X}^{(c)} = \left\{x^c \mid x \in \mathfrak{X}\right\}$.

Распределение случайного множества K можно определить эквивалентным образом, задав на множестве $2^{\mathfrak{X}}$ всех подмножеств конечного множества $\mathfrak{X}$ одну из следующих функций множеств, где $X \in 2^{\mathfrak{X}}$, т.е. $X \subseteq \mathfrak{X}$:

$$p(X) = \mathbf{P}(K = X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c\right)$$

– распределение вероятностей значений,

$$p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right) \tag{1}$$

– распределение вероятностей покрытий, которые попарно связаны взаимно-обратимыми формулами обращения Мебиуса:

$$p_X = \sum_{X \subseteq Y} p(Y), \tag{2}$$

$$p(X) = \sum_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} p_Y, \tag{3}$$

где $X \in 2^{\mathfrak{X}}$.

Пусть задано случайное множество K под множеством X, т.е. задано вероятностное распределение K. Итак, пусть F – нечеткое множество, определенное на $\mathfrak{X}$, с функцией принадлежности $Z : \mathfrak{X} \to [0,1]$.

Согласно [1] нечеткое множество F называется проекцией K и обозначается $Proj(K)$, если

$$Z(x) = \mathbf{P}(x \in K), \ \forall x \in \mathsf{X}. \tag{4}$$

Заметим, что согласно (1) вероятности в (4) есть не что иное, как вероятность покрытия на моноплете событий

$$P(x \in K) = \mathbf{P}(\{x\} \subseteq K) = p_x,$$

т.е. вероятность события $x \in \mathsf{X}$.

Таким образом, зная вероятностное распределение случайного множества K, ему можно поставить в соответствие нечеткое множество F.

И. Гудмэн предложен способ построения случайного множества по известному нечеткому.

Пусть задано нечеткое множество F в X с функцией принадлежности $Z : \mathsf{X} \to [0,1]$. И пусть носитель нечеткого множества

$$\operatorname{supp}(F) = \{x \,|\, Z(x) > 0, \, x \in \mathsf{X}\} = \{x_1, \dots, x_m\},$$

$m \leq |\mathsf{X}|$. Без ограничения общности можно считать, что при некотором m элементы $\operatorname{supp}(F)$ занумерованы в таком порядке, что

$$0 < Z(x_1) \leq Z(x_2) \leq \dots \leq Z(x_m) \leq 1.$$

Рассмотрим множества $F_i = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_m\}$, $i = \overline{1, m}$ и положим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(K = F_1) = p(F_1) = Z(x_1);\\
&\mathbf{P}(K = F_2) = p(F_1) = Z(x_2) - Z(x_1);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\mathbf{P}(K = F_i) = p(F_1) = Z(x_i) - Z(x_{i-1});\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\mathbf{P}(K = F_m) = p(F_1) = Z(x_m) - Z(x_{m-1});\\
&\mathbf{P}(K = \%) = p(\%) = 1 - Z(x_m).
\end{aligned} \tag{5}$$

Для всех остальных подмножеств X множества X положим $p(X) = 0$. Из (2), (3) и системы (5) следует справедливость (4), т.е. $p_{x_i} = Z(x_i)$.

Таким образом, фиксация проекции случайного множества (задание нечеткого множества) эквивалентна фиксации $|\mathsf{X}|$ параметров из $2^{|\mathsf{X}|}$ параметров, задающих распределение вероятностей покрытия случайного множества K в общем случае. Следовательно, одному нечеткому множеству F в X с функций принадлежности $Z(x)$ можно поставить целый класс случайных множеств K, заданных распределениями вероятностей покрытия с фиксированными вероятностями для событий-моноплетов $\mathbf{p}_{\mathsf{X}} = \{p_X, X \subseteq \mathsf{X} \,|\, p_x = Z(x), x \in \mathsf{X}\}$. Из этого класса распределений следует независимо-точечные распределения:

$$p(X) = \prod_{x \in X} p_x \prod_{x \in X^c} (1 - p_x), \ \ X \in 2^{\mathsf{X}},$$

поскольку для его задания необходимо зафиксировать $|\mathsf{X}|$ параметров p_x, $x \in \mathsf{X}$, т.е. случайное множество K с независимо-точечным распределением полностью определяется своей проекцией.

И. Гудмэном получены связи между нечеткими и случайными множествами. Стоит отметить, что изучение этих связей началось с введения случайных множеств с целью развития и обобщения аппарата нечетких множеств Л.Заде. Дело в том, что математический аппарат нечетких множеств не позволяет в должной мере учитывать различные варианты зависимости между понятиями (объектами), моделируемыми с его помощью, т.е. не является достаточно гибким. Так, для описания «общей части» двух нечетких множеств используется треугольная норма. Чаще всего используют две треугольные нормы – вероятностное произведение и пересечение по Заде. Если применяется первая из них, то фактически предполагается, что множества ведут себя как проекции независимых случайных величин. Операция пересечения по Заде также накладывает вполне определенные ограничения на вид зависимости между множествами, причем в этом случае найдены даже необходимые и достаточные условия.