УДК 519.248:[33+301+159.9]

ПОЛНОЕ СЕТ-РАССТОЯНИЕ И СЕТ-РАССЕЯНИЕ МНОЖЕСТВА СОБЫТИЙ

Попкова М.И.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук Голденок Е.Е.
Сибирский федеральный университет

В статье будут рассмотрены новые эвентологические понятия сет-расстояния, полной ковариации и сет-рассеяния.

Обычно расстояние определяется лишь для пар элементов, а не для произвольных множеств элементов. Сет-функция Δ_X, определяемая для $X \subseteq \mathfrak{X}$ как

$$\Delta_X = \mathrm{P}\left(\bigcup_{x \in X} x\right) - \frac{1}{|X|}\sum_{x \in X} \mathrm{P}(x),$$

называется сет-расстоянием множества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$. Данная функция обобщает понятие вероятностного расстояния между двумя событиями $x, y \in \mathfrak{X}$:

$$\Delta_{x,y} = \frac{1}{2}\mathrm{P}(x \Delta y),$$

а так же для произвольного $X \subseteq \mathfrak{X}$ обладает привычными свойствами расстояния: неотрицательностью и симметричностью.

Далее, определим расстояние события до множества. Пусть $x \in \mathfrak{X}$, расстоянием этого события до множества $X \subseteq \mathfrak{X}$ называется действительная числовая функция $d: \mathfrak{X} \times 2^{\mathfrak{X}} \to \mathbb{R}$, которая на $(x, X) \in \mathfrak{X} \times 2^{\mathfrak{X}}$ принимает значение

$$d(x, X) = \frac{1}{|X|}\mathrm{P}\left\{x \Delta \left(\bigcup_{y \in X} y\right)\right\},$$

Расстояние между событием и множеством событий – это частный случай расстояния между множествами событий. Расстоянием между множествами событий $X \subseteq \mathfrak{X}$ и $Y \subseteq \mathfrak{X}$ называется действительная числовая функция $d: 2^{\mathfrak{X}} \times 2^{\mathfrak{X}} \to \mathbb{R}$, которая на $(X, Y) \in 2^{\mathfrak{X}} \times 2^{\mathfrak{X}}$ принимает значение, равное вероятности симметрической разности объединений этих двух множеств событий:

$$d(X, Y) = \frac{1}{|X| \cdot |Y|}\mathrm{P}\left\{\left(\bigcup_{x \in X} x\right) \Delta \left(\bigcup_{x \in Y} x\right)\right\},$$

Следует отметить, что в этих определениях идет речь о псевдометриках, т.к. для этих двух определений не выполняется аксиома нуля.

Рассмотрим произвольное конечное множество событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ из алгебры вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. События $x \in \mathfrak{X}$ имеют вероятности $\mathrm{P}(x)$. В случае, если $\mathfrak{X} = \{x, y\}$ – дуплет, получаем следующую формулу парной ковариации:

$$\mathrm{Kov}_{xy} = \mathrm{P}(x \cap y) - \mathrm{P}(x)\mathrm{P}(y),$$

которая имеет следующую метрическую интерпретацию:

$$2\mathrm{Kov}_{xy} = \mathrm{P}^i(x \Delta y) - \mathrm{P}(x \Delta y),$$

где $\mathrm{P}(x\Delta y) = \mathrm{P}(x\cup y) - \mathrm{P}(x\cap y)$ - вероятностное расстояние между событиями в общем случае, а $\mathrm{P}^i(x\Delta y) = \mathrm{P}(x\cup y) - \mathrm{P}(x)\mathrm{P}(y)$ - вероятностное расстояние между независимыми событиями , имеющими те же вероятности, что и x и y. Аналогично можно выписать формулы для М-дополнения $\{x,y\}^{\mathrm{c}}$ дуплета событий $\{x,y\} \subseteq \mathfrak{X}$:

$$\mathrm{Kov}_{\{x,y\}^{\mathrm{c}}} = \mathrm{P}(x^{\mathrm{c}} \cap y^{\mathrm{c}}) - \mathrm{P}(x^{\mathrm{c}})\mathrm{P}(y^{\mathrm{c}}),$$

котрая совпадает с парной ковариацией дуплета событий $\{x,y\}$. Парная ковариация М-дополнения дуплета событий так же имеет метрическую интерпретацию:

$$2\mathrm{Kov}_{\{x,y\}^{\mathrm{c}}} = \mathrm{P}^i(x^{\mathrm{c}}\Delta y^{\mathrm{c}}) - \mathrm{P}(x^{\mathrm{c}}\Delta y^{\mathrm{c}}),$$

Таким образом, парная ковариация, а также парная ковариация М-дополнения дуплета событий являются мерами зависимости событий из дуплета, а их метрические интерпретации имеют смысл разности вероятностных расстояний между событиями дуплета в общем и независимом случаях.

Рассматривая вместо дуплета произвольное подмножество событий из $\mathfrak{X}$ можем определить мультиарные ковариации множества событий, а также его М-дополнения:

$$\mathrm{Kov}_X = \mathrm{P}\left(\bigcap_{x\in X} x\right) - \mathrm{P}^i\left(\bigcap_{x\in X} x\right),$$

$$\mathrm{Kov}_{X^c} = \mathrm{P}\left(\bigcap_{x\in X} x^{\mathrm{c}}\right) - \mathrm{P}^i\left(\bigcap_{x\in X} x^{\mathrm{c}}\right),$$

Мультиарные ковариации множества событий и его М-дополнения представляют собой обобщение понятия парных ковариаций дуплета событий и определяются следующими соотношениями:

$$\mathrm{Kov}_X = \Delta^i_{X^c} - \Delta_{X^c},$$

$$\mathrm{Kov}_{X^c} = \Delta^i_X - \Delta_X$$

Полная ковариация, или сет-рассеяние, множества событий $\mathfrak{X}$ определяется как величина, равная сумме произведений мультиарных ковариаций Kov_X подмножеств $X \subseteq \mathfrak{X}$ на мощности этих подмножеств:

$$\overline{\mathrm{Kov}}_{\mathfrak{X}} = \sum_{X\subseteq\mathfrak{X}} |X|\mathrm{Kov}_X$$

Полная ковариация (сет-рассеяние) множества событий метрически интерпретируется как разность полных сет-расстояний этого множества в тотально независимом и общем вариантах:

$$\overline{\mathrm{Kov}}_{\mathfrak{X}} = \bar{\Delta}^i_X - \bar{\Delta}_{\mathfrak{X}}$$

где $\bar{\Delta}_{\mathfrak{X}}$ - полное сет-расстояние, которое определяется как сумма сет-расстояний всех подмножеств данного множества:

$$\bar{\Delta}_{\mathfrak{X}} = \sum_{X\subseteq\mathfrak{X}} (\Delta_X)$$

Отметим, что сет-рассеяние есть совокупная метрическая характеристика структуры зависимости множества событий.

В качестве практического примера можно рассмотреть любую задачу на измерение полного сет-расстояния и сет-рассеяния множества событий.