

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДСТВ В ИГРЕ ОДНОЙ КОАЛИЦИИ

Огородникова К. В.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук Голденко Е.Е.

Сибирский федеральный университет

Теория эвентологической теории игр

Случайным множеством событий под \mathfrak{X} называется измеримое отображение

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}),$$

где $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ выделенное конечное множество событий (состоящих из $N = |\mathfrak{X}|$ событий), $2^{\mathfrak{X}}$ – множество всех подмножеств \mathfrak{X} .

Распределением вероятностей (эвентологическим распределением) случайного множества событий K называется набор из 2^N вероятностей $p(E) = P(K = E)$, $E \in 2^{\mathfrak{X}}$. Пусть $\mathfrak{X} = \{x_1, \dots, x_N\}$ – конечное множество игроков. Множество \mathfrak{X} неупорядоченное, а индекс введен, только чтобы различать игроков.

Коалицией игроков называется любое подмножество $E \subseteq \mathfrak{X}$. Функция множеств:

$$v: 2^{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathbf{R},$$

такая, что $v(\emptyset) = 0$, называется *характеристической функцией*. Данная функция определяет выигрыш или ценность $v(E)$ любой коалиции игроков $E \subseteq \mathfrak{X}$.

Проблемой дележа занимались Нейман, Моргенштерн, Шепли, Банзаф и Вилкас. Ими было введено следующее определение дележа.

Определение 1: Дележом (для игры N лиц с характеристической функцией v) называется вектор $\varphi = (\varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_N})$, который удовлетворяет условиям:

$$\sum_{i=1}^N \varphi_{x_i} = v(\mathfrak{X}), \quad (1)$$

$$\varphi_{x_i} \geq v(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

В работе рассмотрим только функцию Шепли и индекс Банзафа.

Шепли определяет функцию дележа функцию Шепли аксиоматически. Носителем игры v называется множество X , для которого выполнено условие $v(E) = v(X \cap E)$, $E \subseteq \mathfrak{X}$.

Аксиома 1. О носителе игры. Если X – любой носитель игры, то

$$\sum_{x_i \in X} \varphi_{x_i}[v] = v(X).$$

Аксиома 2. Линейность. Для любых игр u, v

$$\varphi[u + v] = \varphi[u] + \varphi[v]$$

Теорема 1. (о функции Шепли) Существует единственная функция $\varphi[v]$, определенная для всех игр u удовлетворяющая аксиомам A1 и A2

$$\varphi_x[v] = \sum_{E \subseteq \{x\}^c} \frac{1}{NC_{N-1}^{|E|}} (v(E \cup \{x\}) - v(E)), \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Индекс Банзафа задается формулой

$$\varphi_x[v] = \sum_{E \subseteq \{x\}^c} \frac{1}{2^{N-1}} (v(E \cup \{x\}) - v(E)), \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Рассмотренные формулы дележа имеют вероятностную интерпретацию. Например, нетрудно заметить, что в функции Шепли коэффициенты $\frac{1}{NC_{N-1}^{|E|}}$ $E \subseteq \mathfrak{X}/\{x\}$ положительны и их сумма равна 1. Тогда значение игры φ_x – средний выигрыш игрока x в игре v – интерпретируется следующим образом: $\frac{1}{NC_{N-1}^{|E|}}$ – вероятность того, что игрок x присоединится к коалиции игроков $E \subseteq \mathfrak{X}/\{x\}$, а $v(E \cup \{x\}) - v(E)$ – это выигрыш, который должна заплатить коалиция E игроку x за то, что он присоединился к ней.

Аналогично, для индекса Банзафа множители $\frac{1}{2^{N-1}}$ положительны и в сумме дают 1. В данном случае игрок присоединяется к любой коалиции $E \subseteq \mathfrak{X}/\{x\}$ с одной и той же вероятностью $\frac{1}{2^{N-1}}$ и коалиция ему выплачивает выигрыш $v(E \cup \{x\}) - v(E)$.

Применение эвентологической теории игр к решению задачи

Пусть на рынке представлено три фирмы конкурента. Первая за свой товар получает прибыль в размере 500 денежных единиц, вторая – 700 д.е., третья – 0. Если фирмы решают работать вместе, то их общий заработок будет составлять 2000. В случае, когда в коалицию объединяются только первая и вторая фирма их прибыль становится равной 1700 д.е., если первая и третья, то 1200, вторая и третья – 1500. Необходимо определить, как должна быть распределена прибыль между игроками коалиции.

Условия задачи представим в виде таблицы

E	1	2	3	12	13	23	123
$v(E)$	500	700	0	1700	1200	1500	2000

Проиллюстрируем применение теоретических знаний на примере. В нашей задаче $N = 3$.

Применяя функцию дележа Шепли к задаче, получаем:

$$\varphi_1[v] = 700, \varphi_2[v] = 950, \varphi_3[v] = 350.$$

Заметим, что сумма выигрышей совпадает со значением характеристической функции на множестве всех игроков, т.е.:

$$700+950+350=2000=v(123).$$

Используя индекс Банзафа, мы получим:

$$\varphi_1[v] = 800, \varphi_2[v] = 1050, \varphi_3[v] = 450.$$

Зная значения *индекса Банзафа*, нетрудно заметить, что значение характеристической функции на множестве всех игроков меньше, чем сумма выигрышей:

$$800+1050+450=2300>2000=v(123).$$

Таким образом, можно сделать вывод, что *индекс Банзафа* не является дележом в смысле дележа Неймана-Моргенштерна.

По результатам рассмотрения двух методов разделения прибыли можно заметить, что использование *функции Шепли* помогает разделить средства в коалиции более качественным образом, т.е. так, чтобы их сумма не превышала значение полученной прибыли.