

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ЛОКАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ЛЮДСКОГО ПОТОКА

Попел Е.В.,

Научный руководитель канд. физ.-мат. наук Кирик Е.С.

Сибирский федеральный университет

Одним из актуальных направлений математического моделирования является создание математических моделей движения людей. Такие модели используются при решении задач комплексной безопасности в части оценивания времени эвакуации людей из помещений, зданий, сооружений при различных сценариях развития чрезвычайной ситуации.

Многочисленные экспериментальные исследования показали, что существует устойчивая качественная зависимость между скоростью движения потока людей и его плотностью: с ростом плотности скорость убывает. Эта зависимость называется фундаментальной диаграммой. Существуют как табличные, так и аналитические выражения фундаментальной диаграммы. Удовлетворение свойствам фундаментальной диаграммы является одним из критериев качества математической модели движения людей. Кроме того, существуют модели как поточного типа, так и, наиболее популярного в настоящее время, индивидуально-поточного типа, в которых для описания перемещения используется зависимость скорости человека (потока людей) от текущей плотности в явном виде. Поэтому при компьютерном моделировании возникает задача численного оценивания плотности потока в момент времени t на локальном участке. Методам решения этой задачи и посвящена данная работа: формулируется постановка задачи, описываются возможные методы решения, приводится их сравнительный анализ.

1. Постановка задачи.

Предполагаем, что граничные условия (плоская область, в которой моделируется движение людей) известны и заданы в глобальной системе координат. Каждый человек в момент времени t задан своей проекцией на плоскость, форма проекции – диск, радиуса R , [м], с центром в точке (x, y) . В области расположено произвольное число людей с учетом принципа исключения (проекции не пересекаются).

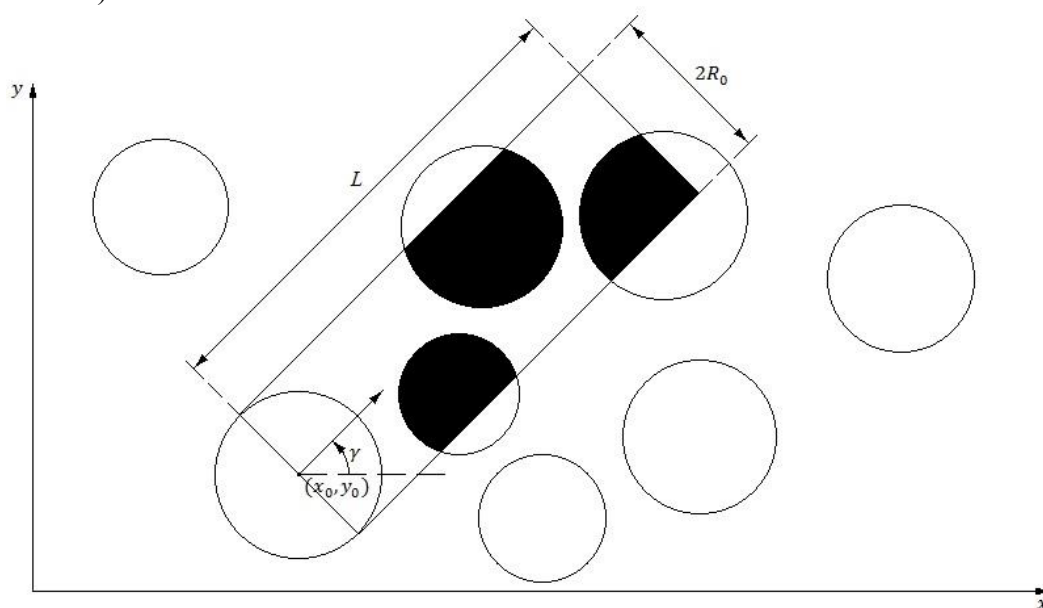


Рисунок 1. Пример расчетной ситуации.

Считаем, что размер и форма участка, на котором требуется оценить плотность людей, известны. Как правило, это определяется моделью движения людей. В данном случае будем рассматривать прямоугольный участок V ширины $2R_0$, [м], и длины L , [м] (как изображено на рисунке 1). В качестве точки привязки участка V определим координату (x_0, y_0) , которая совпадает с центром одного из дисков радиуса R_0 , а так же считаем, что участок находится под углом наклона γ относительно оси Ox глобальной системы координат. Требуется оценить плотность покрытия участка V другими дисками.

2. Решение задачи.

Было разработано и программно реализовано несколько методов оценивания плотности потока. Способы отличаются количеством вычислительных операций, точностью и физической интерпретацией. Сначала рассматриваются методы, дающие равномерную оценку плотности, затем – взвешенную.

Во всех составленных алгоритмах в первую очередь исключаются из рассмотрения все те диски, которые вообще не пересекаются с участком V . Далее происходит переход к новой системе координат $Ox'y'$:

$$\begin{cases} x' = (x_i - x_0)\cos \gamma + (y_i - y_0)\sin \gamma \\ y' = -(x_i - x_0)\sin \gamma + (y_i - y_0)\cos \gamma \end{cases},$$

где (x_i, y_i) – координаты центра i -го диска, пересекающего участок V .

Таким образом, наклон участка V совпадает с осью Oy' , что упрощает все формулы и вычисления в алгоритме, в то время как сам переход к новой системе координат занимает незначительное число операций.

2.1. Аналитический метод.

Аналитический метод состоит в нахождении точной площади покрытия дисками рассматриваемого участка V и последующее соотнесение этой площади с общей площадью участка:

$$D = \hat{S}/S_V.$$

Для нахождения точной площади поочередно определяется положение каждого диска относительно участка V , а затем исходя из этого по геометрическим формулам (такие как площадь сектора, сегмента круга) вычисляется точная площадь пересечения.

2.2. Сеточный метод.

Сеточный метод заключается в разбиении участка V на маленькие ячейки и проверке на пересечение каждой ячейки каким-либо диском. Отношение количества пересекаемых ячеек к общему числу ячеек дает искомую оценку плотности:

$$D = \hat{N}/N_0.$$

2.3. Метод Монте-Карло и взвешенная плотность.

В методе Монте-Карло внутри участка V генерируется P точек. Если точка попадает на диск, то инкрементируется счетчик, который в итоге будет содержать значение \hat{P} – количество точек, которые лежат в одном из дисков. Для получения равномерной оценки плотности берется отношение:

$$D = \hat{P}/P.$$

Данный метод позволяет перейти к взвешенной оценке плотности – гораздо более показательной величины, ведь если в участке V диски расположены близко к точке привязки (x_0, y_0) , то в действительности человек не сможет сдвинуться с места в отличие от случая, когда те же самые диски расположены в дальнем конце участка.

Каждая генерируемая в методе Монте-Карло точка наделяется некоторым “весом” – функцией, зависящей от расстояния от этой точки до точки (x_0, y_0) . Для получения веса используется оценка Розенבלата-Парзена:

$$D = \frac{1}{C_1 C_2 P} \sum_{i=1}^P \Phi\left(\frac{x_0 - x_i}{C_1}\right) \Phi\left(\frac{y_0 - y_i}{C_2}\right)$$

где ρ – итоговая суммарная взвешенная плотность, C_1, C_2 – коэффициенты размытости для x и y -координаты, $C_1 = R_0 \cdot 5^{-\frac{1}{2}}$, $C_2 = L \cdot 5^{-\frac{1}{2}}$, $\Phi(t) = 0.335 - 0.067t^2$, (x_0, y_0) – координаты центра исходной окружности, (x_i, y_i) – координаты i -ой точки, попавшей на какой-нибудь круг.

3. Анализ методов оценивания плотности потока людей

Самым точным методом является аналитический, так как погрешность в результате может возникать только вследствие погрешности записи чисел в памяти компьютера. Также данный метод работает в десятки раз быстрее, чем метод Монте-Карло и сеточный, однако используя аналитический алгоритм оценки плотности сложно перейти к желаемой взвешенной плотности.

Методы Монте-Карло и сеточный работают примерно с одинаковой скоростью, однако эксперименты показали, что при одном и том же числе ячеек сетки / генерируемых точек сеточный метод дает менее точный результат. Уже при 5000 точек в методе Монте-Карло на участке площадью $5 \times 0,4 \text{ м}^2$ точность оценивания плотности достигает 99 %. Сеточный метод дает такую же точность при 100000 ячеек.

Время выполнения каждого из составленных алгоритмов по каждому методу для наглядности представлены в виде сравнительной таблицы. Все вычисления проводились при абсолютно одинаковых условиях, параметры в алгоритмах подобраны таким образом, чтобы точность вычисления в среднем была не менее 99 %:

Метод нахождения плотности	Время 1000 вычислений, в секундах
Аналитический	0,119
Монте-Карло	1,230
Розенבלата-Парзена	1,250
Сеточный	12,63

В итоге, самым удобным и оптимальным методом оценки взвешенной плотности является точечный метод Монте-Карло с использованием функции-распределения Розенבלата-Парзена.