

ОБРАЗОВАНИЕ ЛЬДА ПРИ КОНТАКТЕ ХОЛОДНОГО ТЕЛА С ВОДОЙ

Захаричев О.В.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук Дмитриев В.Л.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

В работе рассматривается процесс нарастания ледяной корки при контакте холодного твердого тела с водой. Задача рассматривается в плоскоодномерном приближении, получено ее автомодельное решение.

Пусть имеется полубесконечное холодное твердое тело, контактирующее с водой. В плоскости контакта тела с водой (координата $x = 0$) начинается процесс льдообразования. При этом мы имеем дело с подвижной границей, на которой происходит нарастание нового слоя льда (координата $x = x_b$). Схема образования льда приведена на рис. 1. Здесь в области $-\infty < x < 0$ находится твердое тело, в области $0 \leq x < x_b$ расположен слой образующегося льда, а в области $x_b \leq x < \infty$ находится вода.

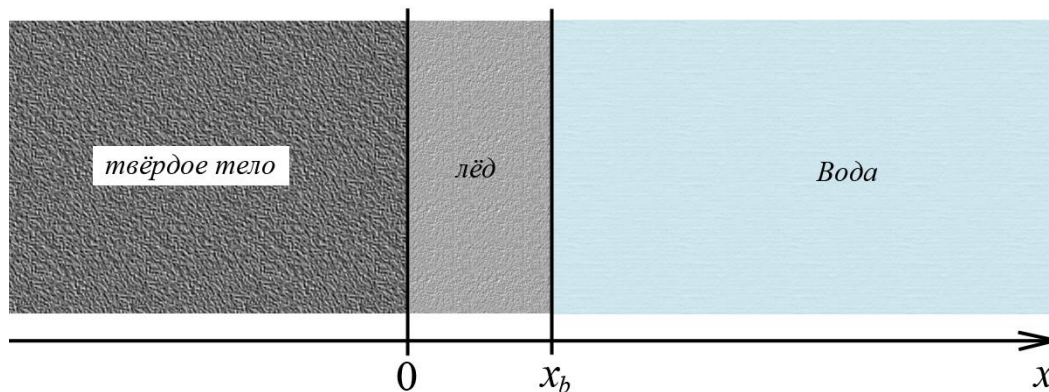


Рис. 1. Схема образования льда.

Распределение температур в трех рассматриваемых областях описывается уравнениями теплопроводности:

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \lambda_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2}, \quad (x < 0)$$

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}, \quad (0 \leq x < x_b)$$

$$\rho_l c_l \frac{\partial T_l}{\partial t} = \lambda_l \frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2}, \quad (x \geq x_b)$$

где ρ_j — плотность, c_j — удельная теплоемкость, λ_j — теплопроводность; нижний индекс $j = s, i, l$ относится к твердому телу, льду и воде соответственно.

Для решения поставленной задачи необходимо задать условия на границах раздела сред (условия равенства температур и тепловых потоков):

$$T_s = T_i = T_{si}, \quad \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x}, \quad (x = 0)$$

$$T_i = T_l = \tilde{T}, \quad \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x} + \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial x} = \rho_l L \dot{x}_b, \quad (x = x_b)$$

где L – удельная теплота плавления льда, \tilde{T} – температура кристаллизации, равная для воды 273 К. Температуру T_{si} на границе раздела «твердое тело – лед» будем считать постоянной ($T_{si} = \text{const}$).

В начальный момент времени $t = 0$ температуры твердого тела и воды однородны и равны соответственно T_{s0} и T_{l0} .

В такой постановке задача допускает введение автомодельной переменной $\xi = x/\sqrt{\aleph_i t}$, где $\aleph_i = \lambda_i/\rho_i c_i$ – коэффициент температуропроводности льда. Координата границы, на которой происходит образование льда, тогда будет определяться как $x_b = \xi_b \sqrt{\aleph_i t}$, а скорость ее движения \dot{x}_b найдется как $\dot{x}_b = \frac{\xi_b}{2} \frac{\aleph_i}{\sqrt{\aleph_i t}}$.

Система уравнений теплопроводности в рамках введенных обозначений примет следующий вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\xi}{2} \frac{dT_s}{d\xi} &= \frac{\aleph_s}{\aleph_i} \frac{d^2 T_s}{d\xi^2}, & (\xi < 0) \\ -\frac{\xi}{2} \frac{dT_i}{d\xi} &= \frac{d^2 T_i}{d\xi^2}, & (0 \leq \xi < \xi_b) \\ -\frac{\xi}{2} \frac{dT_l}{d\xi} &= \frac{\aleph_l}{\aleph_i} \frac{d^2 T_l}{d\xi^2} & (\xi \geq \xi_b) \end{aligned}$$

Решения этой системы имеют вид:

$$\begin{aligned} T_s &= T_{s0} + (T_{si} - T_{s0}) \int_{-\infty}^{\xi} \exp\left(-\frac{\aleph_i \xi^2}{\aleph_s 4}\right) d\xi \Big/ \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{\aleph_i \xi^2}{\aleph_s 4}\right) d\xi, & (-\infty < \xi < 0) \\ T_i &= T_{si} + (\tilde{T} - T_{si}) \int_0^{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\xi \Big/ \int_0^{\xi_b} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\xi, & (0 \leq \xi < \xi_b) \\ T_l &= T_{l0} + (\tilde{T} - T_{l0}) \int_{\xi}^{\infty} \exp\left(-\frac{\aleph_i \xi^2}{\aleph_l 4}\right) d\xi \Big/ \int_{\xi_b}^{\infty} \exp\left(-\frac{\aleph_i \xi^2}{\aleph_l 4}\right) d\xi & (-\infty < \xi < 0) \end{aligned}$$

Для построения решений необходимо найти координату границы льдообразования ξ_b и температуру T_{si} . Это можно сделать, решив систему из двух уравнений баланса тепловых потоков на границах раздела сред, записанных выше. С учетом полученных решений для распределения температур, данная система примет вид:

$$\begin{cases} \frac{T_{si} - T_{s0}}{\int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{\aleph_i \xi^2}{\aleph_s 4}\right) d\xi} = \frac{\lambda_i}{\lambda_s} \frac{\tilde{T} - T_{si}}{\int_0^{\xi_b} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\xi}, \\ \lambda_i \frac{(\tilde{T} - T_{si}) \exp\left(-\frac{\xi_b^2}{4}\right)}{\int_0^{\xi_b} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\xi} + \lambda_l \frac{(\tilde{T} - T_{l0}) \exp\left(-\frac{\aleph_i \xi_b^2}{\aleph_l 4}\right)}{\int_{\xi_b}^{\infty} \exp\left(-\frac{\aleph_i \xi^2}{\aleph_l 4}\right) d\xi} = \frac{\rho_i L \xi_b \aleph_i}{2}. \end{cases}$$

Данная система уравнений легко решается средствами MathCAD. На основе полученных решений построены графические зависимости, иллюстрирующие процесс образования льда и динамику температур в рассматриваемых областях.

На рис. 2 показана зависимость температуры в системе «железо-лед-вода» от автономной координаты. Начальные температуры в системе: железо – $T_{s0} = 243 \text{ К}$, вода – $T_{l0} = 277 \text{ К}$. При этом $T_{si} = 252.9 \text{ К}$, $\xi_b = 0.458$. Толщина слоя льда по прошествии 24 часов в этом случае будет составлять около 15,6 см.

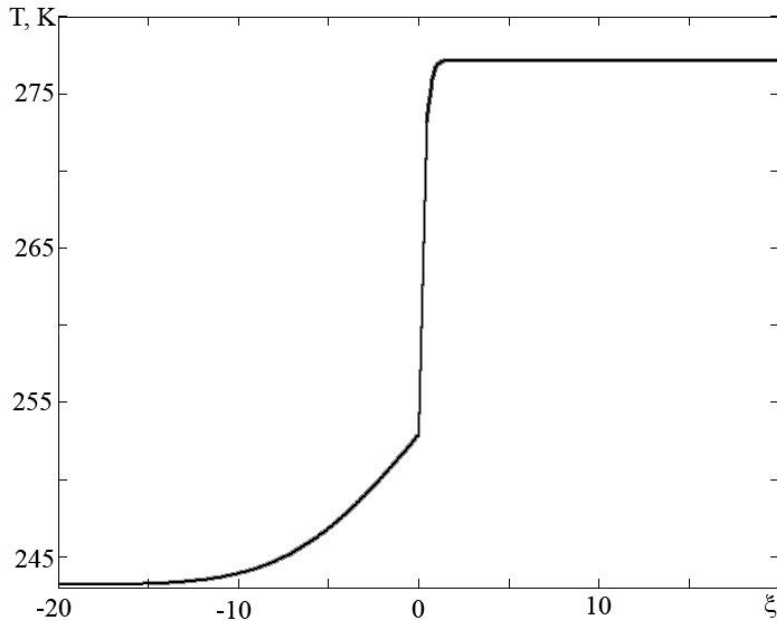


Рис. 2. Профиль температуры для системы «железо-лед-вода».

На основе записанных решений также получено, что при одной и той же температуре холодного твердого тела и воды скорость роста ледяного слоя сильно зависит от теплопроводности твердого тела. С увеличением теплопроводности процесс льдообразования идет более интенсивно.

Кроме того, получено, что образование ледяного слоя возможно только в случаях, если температуры твердого тела и жидкости удовлетворяют следующему условию

$$T_l \leq \tilde{T} + \frac{\lambda_s (T_{si} - T_{s0})}{\lambda_l} \frac{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\aleph_i \xi^2}{\aleph_l 4}\right) d\xi}{\int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{\aleph_i \xi^2}{\aleph_s 4}\right) d\xi}.$$

Так, например, при температуре железа $T_{s0} = 268 \text{ К}$ образование льда на границе раздела «железо-вода» возможно, если температура воды удовлетворяет условию $T_{l0} \leq 327.2 \text{ К}$. В противном случае лед образовываться не будет.

Если в качестве жидкости выступает вода, то условие образования льда в таком случае можно переписать в виде

$$T_l \leq -\frac{\lambda_s T_{s0}}{\lambda_l} \frac{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\aleph_i \xi^2}{\aleph_l 4}\right) d\xi}{\int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{\aleph_i \xi^2}{\aleph_s 4}\right) d\xi},$$

т.к. для воды температуры \tilde{T} и T_{si} в этом случае одинаковы, и равны 273 К ; при этом T_{l0} и T_{s0} выражены в градусах Цельсия.