УДК 519.234

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ЗАВИСИМЫМИ ВХОДНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Чжан Е.А.,
научный руководитель канд. тех. наук Сергеева Н.А.
Сибирский федеральный университет

Введение. При построении модели учитывается вся известная (априорная) информация об объекте. В случае, когда уровень априорной информации достаточно высок (определена или хорошо угадана структура объекта, большой объем исходной выборки измерений), то используется параметрическая идентификация. Данный способ идентификации широко распространен на сегодняшний день. Однако на практике встречаются процессы, у которых существует стохастическая зависимость между входными переменными. В этом случае параметрические модели не всегда являются адекватными. О таких процессах пойдет речь в данной статье.

Постановка задачи. Рассмотрим стохастический безынерционный многомерный объект. Общая схема такого объекта представлена на рис. 1 [1, 2].

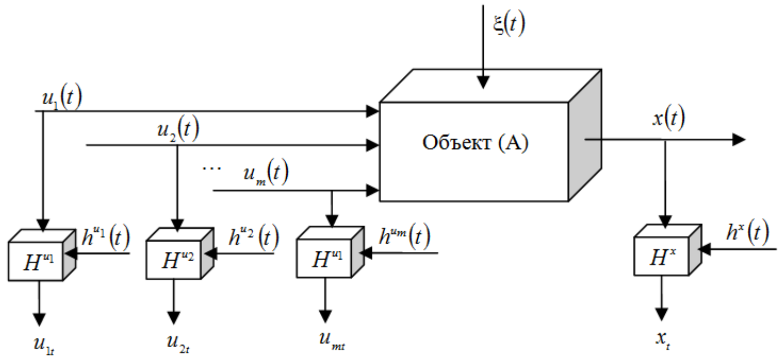

Рис. 1. Общая схема исследуемого объекта

На рис.1 приняты обозначения: А – неизвестный оператор объекта, $x(t) \in \Omega(x) \subset R^1$ – выходная переменная процесса, $u(t) \in \Omega(u) \subset R^m$ – векторное входное воздействие, где m – размерность входного вектора, $\xi(t)$ – векторное случайное воздействие, (t) – непрерывное время, H^u, H^x – каналы связи, соответствующие различным переменным, включающие в себя средства контроля, $h^u(t)$, $h^x(t)$ – случайные помехи измерений соответствующих переменных процесса с нулевыми математическими ожиданиями и ограниченной дисперсией.

Особенность постановки задачи идентификации в том, что между компонентами вектора входного воздействия существует стохастическая зависимость, причем вид этой зависимости априорно не известен. Именно это обстоятельство делает структуру процессов, протекающих в пространстве входных–выходных переменных, «трубчатой» [3].

Идентификация стохастических объектов с зависимыми входными параметрами. Как уже отмечалось ранее, на практике достаточно часто встречаются процессы, имеющие стохастическую зависимость компонент вектора входных переменных. Будем говорить, что объекты, обладающие подобной особенностью, имеют «трубчатую» структуру [3]. Рассмотрим в качестве примера процесса с «трубчатой» структурой объект, представленный на рис. 2.

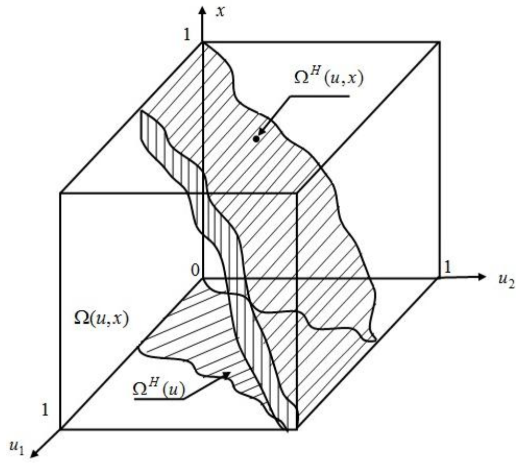

Рис. 2. Объект с «трубчатой структурой»

Как видно из рисунка, область протекания процесса $\Omega(u,x) \in R^3$ представляет собой, без нарушения общности, единичный гиперкуб, где $u \in R^2$, $x \in R^1$. Однако если исследуемый процесс имеет «трубчатую» структуру, то область его протекания ограничивается не всем объемом гиперкуба $\Omega(u,x)$, а его подобластью $\Omega^H(u,x) \in \Omega(u,x)$, которая нам никогда не известна. Поскольку подобласть $\Omega^H(u,x)$ никогда не известна, то и вид самой «трубчатой» структуры нам не известен. При этом заметим, что объем гиперкуба, как это видно из вышеприведенного рисунка, может значительно превышать объем «трубки».

Рассмотрим моделирование процессов, имеющих подобную структуру. Обычно в задаче идентификации безынерционных объектов предполагается наличие некоторой параметризованной модели, представляющей собою поверхность в пространстве «входных-выходных» переменных:

$$\hat{x}_s(u) = \hat{f}(u, \alpha_s) \ , \tag{1}$$

где α_s – вектор параметров. В том случае, когда компоненты вектора входных переменных статистически зависимы, т.е. мы имеем дело с «трубчатой» структурой объекта, необходимо ввести индикатор $I_s(u)$. Модель вышеприведенного типа при этом должна быть скорректирована следующим образом:

$$\hat{x}_s(u) = \hat{f}(u, \alpha_s) I_s(u) \ , \tag{2}$$

где в качестве оценки индикатора можно принять следующее приближение:

$$I_s(u) = \mathrm{sgn}(sc_s)^{-1} \sum_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{m} \Phi\left(c_s^{-1}\left(u^j - u_i^j\right)\right). \tag{3}$$

Параметр размытости ядра c_s и колоколообразная функция $\Phi\left(c_s^{-1}\left(u^j - u_i^j\right)\right)$, имеющая вид треугольного ядра, удовлетворяют следующим условиям сходимости [4]:

$$c_s > 0; \qquad \lim_{s\to\infty} c_s = 0; \qquad \lim_{s\to\infty} s c_s^m = \infty;$$

$$\Phi(c_s^{-1}(u^j - u_i^j)) \geq 0; \qquad \int_{\Omega(u)} \Phi(c_s^{-1}(u^j - u_i^j))du^j < \infty; \qquad \lim_{s\to\infty} c_s^{-1}\Phi(c_s^{-1}(u^j - u_i^j)) = \delta(u^j - u_i^j).$$

Логика построения такого индикатора состоит в том, что при произвольно заданном значении текущей переменной $u = u'$ индикатор $I_s(u)$ примет значение единицы, если u' принадлежит «трубчатой» структуре, определяемой имеющейся выборкой $\{x_i, u_i, i = \overline{1,s}\}$, если же u' приняло значение за пределами «трубки», то индикатор равен нулю. Заметим, что если процесс описывается поверхностью в пространстве $\Omega(u, x)$, то модели (1) и (2) совпадают. Если же процесс имеет трубчатую структуру в этом пространстве, то необходимо использовать модель (2).

Численное моделирование «трубчатых» процессов. Рассмотрим результаты численного эксперимента. Пусть исследуемый объект описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} x = 0.7u_1 + 0.3u_2 + \xi, \\ u_2 = u_1 + \psi, \end{cases} \tag{4}$$

где ξ и ψ – случайные числа, распределенные по нормальному закону на интервале $[-0.05; 0.05]$, $u_1, u_2, x \in [0;3]$. В данном случае уравнение объекта задано с целью получения выборок «входных–выходных» переменных для решения задачи идентификации. При построении модели на основе полученных выборок, структура зависимости выходной переменной x от входных переменных u принята с точностью до параметров. При оценивании параметров используется метод наименьших квадратов (МНК) [5].

Итак, получена выборка статистически независимых наблюдений $\{x_i, u_i, i = \overline{1,s}\}$, где x – измеряемая выходная переменная, $u = (u_1, u_2)$ – векторное входное воздействие, s – объем выборки. Построим параметрическую модель исследуемого объекта по пяти статистически независимым выборкам объемом $s = 100$ (рис. 3).

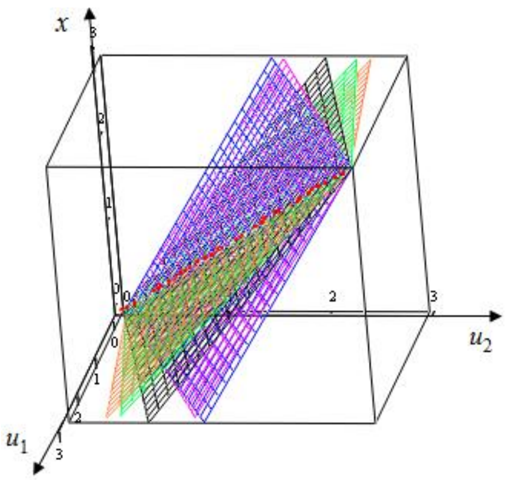

Рис. 3. Параметрические модели «трубчатого» процесса

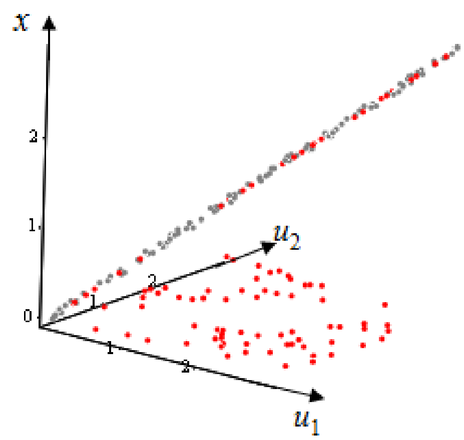

Рис. 4. Модель «трубчатого» процесса с использованием индикатора

На рис. 3 красными точками обозначен исследуемый объект, цветные плоскости – полученные параметрические модели, куб – это регламентированная область протекания процесса. Как видно из рис. 3, «трубчатый» объект представляет собой прямую линию, а модель – плоскость. Как известно, прямую, в данном случае «трубку», можно аппроксимировать бесконечным числом плоскостей, поэтому по 5 независимым выборкам было получено 5 различных моделей. Все они являются неадекватными. Кроме того, для построения параметрической модели (восстановления плоскости) необходим большой объем выборки.

Теперь для рассматриваемого объекта (4) будем использовать модель (2), содержащую индикатор. Вид индикаторной функции описан формулой (3). Результаты численного моделирования объекта (4) для объема выборки $s = 100$ представлены на рис. 4.

На рис. 4 серыми точками показана выборка, определяющая «трубчатый» процесс. Красными точками – точки выборки, случайно сгенерированные в заданной области $u_1, u_2, x \in [0;3]$. Часть точек попали в истинную область протекания процесса («трубка»), значение оценки индикатора в таких точках $I_s(u) = 1$, значение модели в таких точках $\hat{x}_s(u)$ восстанавливается. В точках, которые не попали в область «трубки», значение оценки индикатора равно нулю $I_s(u) = 0$, соответственно значение выхода модели (4) в таких точках $\hat{x}_s(u) = 0$.

Следует отметить, что значение $\hat{x}_s(u) = 0$ может принадлежать истинной области протекания процесса («трубке»), поэтому примем, что индикатор принимает булевы значения – если точка не принадлежит «трубке» ($I_s(u) = 0$), то значение выхода модели в ней не восстанавливается, а если принадлежит ($I_s(u) = 1$), то значение – восстанавливается.

Заключение. Рассмотрены процессы, имеющие «трубчатую» структуру. Необходимо учитывать, что область протекания таких процессов никогда априорно не известна и должна быть определена при идентификации. С этой целью стандартная параметрическая модель была дополнена индикаторной функцией. Предложенная индикаторная функция основана на непараметрической оценки функции регрессии по наблюдениям.

Список литературы

1. Медведев А.В. Непараметрические системы адаптации. – Новосибирск: Наука, 1983. - С. 174.
2. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. – М: Наука, 1984. - С. 320.
3. Медведев А.В. Анализ данных в задаче идентификации // Компьютерный анализ данных моделирования. Минск: БГУ, 1995. Т. 2. С. 201-206.
4. Надарая Э.А. Непараметрические оценки плотности вероятности и кривой регрессии. – Тбилиси: Издательство Тбилисского университета, 1983. - С. 194.